

# FRÉGIER-Punkt und FRÉGIER-Gerade

Roland Stärk, 2018

Publiziert auf [www.geometria.ch](http://www.geometria.ch)

## 1

Einem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  werden rechtwinklige Dreiecke eingeschrieben, alle mit dem rechten Winkel bei einem Punkt  $P$  (Fig. 1).

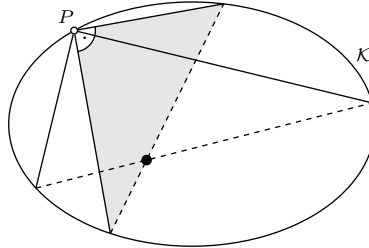


Fig. 1

Was bei einem Kreis selbstverständlich ist, gilt bei jedem Kegelschnitt:

Die Hypotenusen dieser Dreiecke gehen alle durch einen gemeinsamen Punkt, den *Fréquierpunkt* von  $P$  bezüglich  $\mathcal{K}$  (M.FRÉGIER, 1816 Troyes).

Dieses Theorem lässt sich leicht mit Hilfe einer Zentralkollineation beweisen, welche den Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  in einen ( $\mathcal{K}$  in  $P$  berührenden) Kreis abbildet.

Wir gehen hier analytisch vor, da später der analytische Weg bei weiterführenden Problemen oft nötig sein wird.

Die Beschränkung der Rechnung auf eine Ellipse, mit den Halbachsen  $a, b$ , soll genügen.

$$\mathcal{K}: b^2 t_1^2 + a^2 t_2^2 - a^2 b^2 t_3^2 = 0$$

(homogene Cartesische Koordinaten  $t_1, t_2, t_3$ ).

Rechnung mit *Mathematica* [5].

Der Punkt  $P$  lässt sich mit einem Parameter  $p$  ansetzen  $(a(p^2 - b^2), 2b^2p, b^2 + p^2)$ . Das ergibt für den Fréquierpunkt  $F_P$

$$\left( a(a^2 - b^2)(b^2 - p^2), 2(a^2 - b^2)b^2p, -(a^2 + b^2)(b^2 + p^2) \right).$$

Zwei der rechtwinkligen Dreiecke fallen besonders auf (Fig. 2), dasjenige dessen Katheten parallel zu den Kegelschnittachsen verlaufen und dessen Hypotenuse durch das Kegelschnittzentrum  $O$  geht, und zweitens das zu einer Strecke ausgeartete, orthogonal zur Tangente in  $P$ .

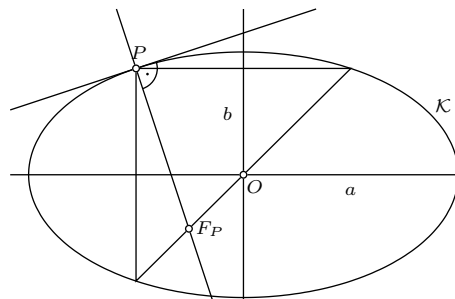


Fig. 2

Der Fréquierpunkt  $F_P$  von  $P$  liegt somit auf dem Durchmesser von  $\mathcal{K}$ , der symmetrisch ist (bez. der Achsen) zum Durchmesser, welcher  $P$  enthält, und auf der Geraden durch  $P$ , die orthogonal ist zur Tangente an  $\mathcal{K}$  in  $P$ .

Für das Verhältnis der Entfernungen der Punkte  $F_P$  und  $P$  vom Kegelschnittzentrum ergibt sich für alle Punkte  $P$

$$\frac{\overline{F_P O}}{\overline{P O}} = \frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2}.$$

Dies bedeutet: Die Streckspiegelung mit diesem Verhältnis und mit dem Zentrum  $O$  und den Achsen der Ellipse, führt  $P$  in  $F_P$  über.

Auf die Frage, was mit einem anderen Winkel bei  $P$ , verschieden von  $90^\circ$ , passiert, gibt das Konstruktionsystem Cabri [4], unser ständiger Begleiter, schnelle Auskunft (Fig. 3).

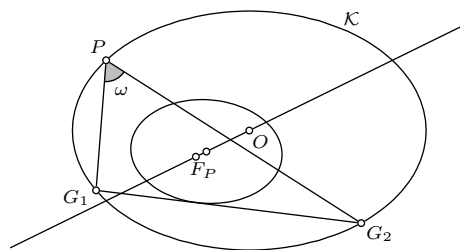


Fig. 3

Die Sehnen  $G_1G_2$  des Kegelschnitts  $\mathcal{K}$ , die man vom auf  $\mathcal{K}$  liegenden Punkt  $P$  aus unter dem Winkel  $\omega$  oder  $180^\circ - \omega$  sieht, hüllen einen Kegelschnitt ein, dessen Zentrum kollinear ist mit dem Zentrum  $O$  von  $\mathcal{K}$  und dem Frégierpunkt  $F_P$  von  $P$ .

## 2

Auch für Punkte  $P$ , die nicht auf dem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  liegen (verschieden von  $O$ ), lässt sich ein "Frégierpunkt" bezüglich  $\mathcal{K}$  definieren. Die Fig. 4 zeigt, wie.

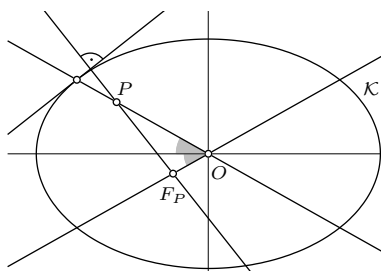


Fig. 4

Die Gerade durch  $P$  und das Zentrum  $O$  von  $\mathcal{K}$  wird an der Achse von  $\mathcal{K}$  gespiegelt, und durch  $P$  wird die Gerade gelegt, die orthogonal ist zu einer Geraden, welche zu  $OP$  konjugierte Richtung (bezüglich  $\mathcal{K}$ ) hat. Das kann die Tangente im Schnittpunkt von  $OP$  mit  $\mathcal{K}$  sein oder die Verbindung von  $O$  mit dem Mittelpunkt einer zu  $OP$  parallelen Sehne... (Die Fig. 5 zeigt verschiedene Fälle).

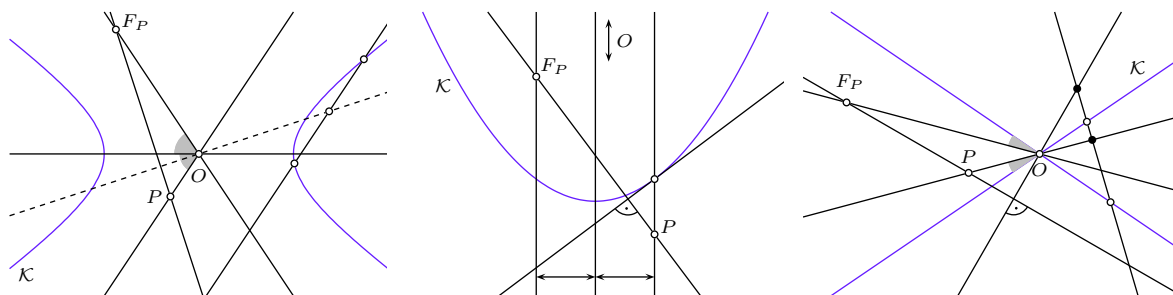


Fig. 5

Wenn  $\mathcal{K}$  ein Kreis ist, ist dessen Mittelpunkt der Frégierpunkt jedes Punktes  $P$ .  
Bei einer Gleichseithyperbel sind die Frégierpunkte Fernpunkte.

Natürlich auch hier, wenn  $P$  nicht auf  $\mathcal{K}$  liegt, die Frage, welche Sehnen  $UV$  von  $P$  aus unter rechtem Winkel gesehen werden (Fig. 6).

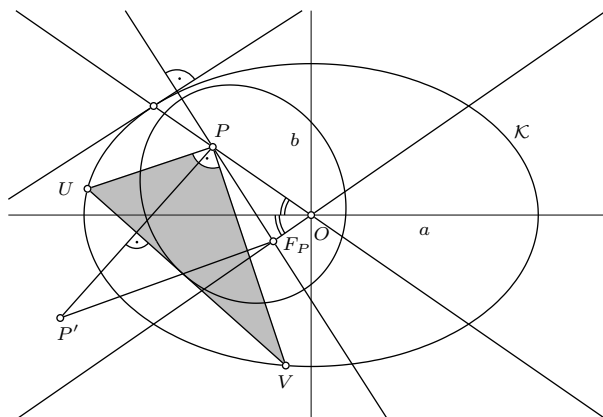


Fig. 6

Die Antwort:

Die Sehnen  $UV$ , die man von  $P$  aus unter rechtem Winkel sieht, hüllen einen Kegelschnitt ein, welcher  $P$  und den Frégierpunkt  $F_P$  von  $P$  als Brennpunkt hat.

Andeutungsweise wieder die Rechnung im Fall der Ellipse.

Zum Punkt  $P(m, n, 1)$  gehört der Frégierpunkt  $F_P((a^2 - b^2)m, -(a^2 - b^2)n, a^2 + b^2)$ .

Ausgehend vom Punkt  $U(a(u^2 - b^2), 2b^2u, b^2 + u^2)$  auf  $\mathcal{K}$  berechnet man  $V$ , spiegelt  $P$  an  $UV$  in  $P'$  und braucht dann nur nachzuweisen, dass die Strecke  $F_P P'$  unabhängig ist vom Parameter  $u$ :

$$\overline{F_P P'} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - (m^2 + n^2)}.$$

( $P'$  durchläuft den Leitkreis des resultierenden Kegelschnitts).

Man untersuche den schwierigen Fall eines anderen Blickwinkels bei  $P$  vielleicht einfach noch mit *Cabri*.

### 3

Eine Verallgemeinerung.

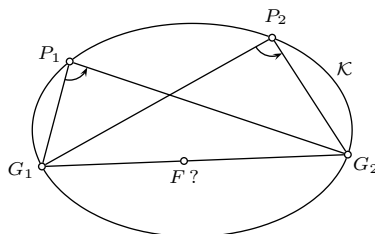


Fig. 7

Gegeben sind auf einem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  zwei Punkte  $P_1, P_2$  (Fig. 7). Gesucht sind Sehnen  $G_1 G_2$ , welche die Winkelbedingung

$$\angle G_1 P_1 G_2 + \angle G_1 P_2 G_2 = 0$$

erfüllen (orientierte Winkel, modulo  $180^\circ$ ).

Die Winkelforderung des Ausgangsproblems wird hier gewissermassen auf zwei Punkte verteilt. Haben die Sehnen  $G_1 G_2$  auch einen gemeinsamen Punkt?

Ja, es ist der Frégierpunkt des Mittelpunkts der Strecke  $P_1 P_2$ .

Winkelsummenbedingungen dieser Art bei einem Viereck werden bekanntlich vom Tangentialpunkt des Vierecks erfüllt [1].

In der Tat, der gemeinsame Punkt  $F$  der Sehnen  $G_1 G_2$  ist der Tangentialpunkt der Vierecke  $P_1 P_2 G_1 G_2$ .

Es gelten somit noch andere Formeln

$$\text{z.B. } \angle G_2 G_1 P_2 + \angle G_2 P_1 P_2 = \angle G_2 F P_2$$

4

Wie bedeutend Frégierpunkte sind, häufig in Verbindung mit Vierecken und deren Tangentialpunkt, sollen drei Beispiele zeigen.

Beispiel 1.

Der Tangentialpunkt  $T$  eines Vierecks  $ABCD$  ist der Frégierpunkt des Gleichseitumhyperbelzentrums  $Z$  von  $ABCD$ , bezüglich jedes Umkegelschnitts von  $ABCD$  (abgesehen von der Gleichseitumhyperbel).

Will man bei gegebenem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  und gegebenem Punkt  $P$  schnell ein eingeschriebenes Viereck haben, von dem  $P$  das Gleichseitumhyperbelzentrum ist, so schneidet man  $\mathcal{K}$  einfach mit einem sich in  $P$  kreuzenden orthogonalen Geradenpaar. Dann lässt sich der Frégierpunkt von  $P$  mit der Tangentialpunkt-prozedur, angewendet bei diesem Viereck, unmittelbar konstruieren,

Beispiel 2.

Gegeben sind ein Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  und ein Punkt  $P$ . Ein durch  $P$  gelegtes Geradenpaar  $g_1, g_2$ , mit fest vorgegebenem Zwischenwinkel  $\omega$  (Fig. 8) wird um  $P$  herumgedreht.

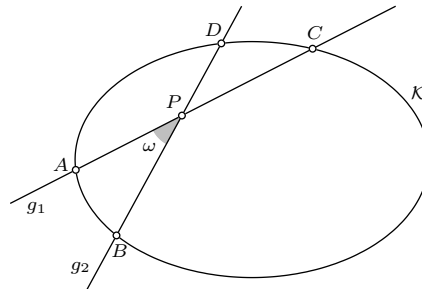


Fig. 8

Wie bewegt sich der Tangentialpunkt  $T$  des Vierecks  $ABCD$  der Schnittpunkte von  $g_1 \cup g_2$  mit  $\mathcal{K}$ ?

Auf einem Orthogonalkreis zum Thaleskreis über der Strecke von  $P$  zum Frégierpunkt von  $P$ .

(Siehe dazu auch [3]).

Beispiel 3.

Bekanntlich ist ein Polardreieck eines Kegelschnitts ein Dreieck, bei dem jede Seite die Polare der Gegenecke ist.

Und der Fusspunktkreis eines Punkts  $P$  bezüglich eines Dreiecks ist der Kreis durch die Lotfusspunkte von  $P$  auf die Seiten des Dreiecks (Fig. 9).

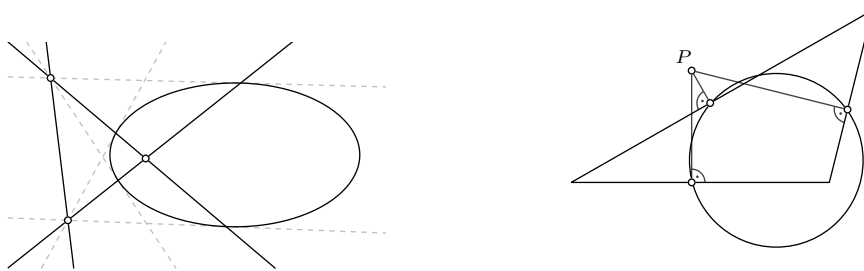


Fig. 9

Gegeben sind nun ein Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  und ein Punkt  $P$ .

Man prüfe den folgenden Satz:

Die Fusspunktkreise von  $P$  bezüglich aller Polardreiecke von  $\mathcal{K}$  haben ein gemeinsames Potenzzentrum.

Mit Cabri lässt sich schnell feststellen, dass die Potenzgeraden je zweier solcher Kreise ein Büschel bilden.

Wie, wo spielt da ein Frégierpunkt mit?

5

Es folgt ein zweiter Teil dieser Fréquier-Theorie, sie soll weiterentwickelt werden.

Betrachtet wird ein Viereck  $ABCD$  und ein Punkt  $P$  (Fig. 10).

Zum Punkt  $P$  gehört bezüglich jedes Umkegelschnitts von  $ABCD$  ein Fréquierpunkt.

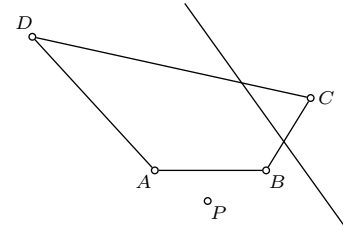


Fig. 10

*Cabri* zeigt an, dass diese Fréquierpunkte (bezüglich der Kegelschnitte des Büschels, mit den Büschelpunkten  $A, B, C, D$ ) alle kollinear sind.

Wir nennen ihre Gerade

*Fréquiergerade* oder *F-Gerade* des Punktes  $P$  bezüglich des Vierecks  $ABCD$ ,

Beim Viereck  $A(a, \frac{1}{a}, 1), B(b, \frac{1}{b}, 1), C(c, \frac{1}{c}, 1), D(d, \frac{1}{d}, 1)$  hat die *F-Gerade* des Punktes  $(u, v, 1)$  die Koordinaten

$$((1 + abcd)u, -(1 + abcd)v, -(a + b + c + d)u + (bcd + cda + dab + abc)v + (1 - abcd)(u^2 + v^2)).$$

Auf den ersten Blick wirken *F-Geraden* ziemlich unkonventionell, nicht leicht zu vereinbaren mit bekannten Elementen eines Vierecks oder Kegelschnittbüschels.

Vielleicht muss einfach mehr geforscht werden.

Eine Sonderstellung nimmt das Gleichseitumhyperbelzentrum  $Z$  des Vierecks  $ABCD$  ein. Zu ihm gehört keine *F-Gerade*, nur der Tangentialpunkt  $T$ , wie oben (Beispiel 1) festgestellt.

Dass sofort ein *Cabri-Makro* hergestellt werden muss, ist klar.

Die Abbildung, die bei gegebenem Viereck  $ABCD$  dem Punkt  $P$  seine *F-Gerade* zuordnet, soll mit  $\Phi_{ABCD}$  bezeichnet werden.

(Wenn offensichtlich ist, welches Viereck gemeint ist, jeweils  $\Phi$  ohne Index).

Ein erstes Ergebnis.

$Z$  sei das Gleichseitumhyperbelzentrum des Vierecks  $ABCD$  (Fig. 11).

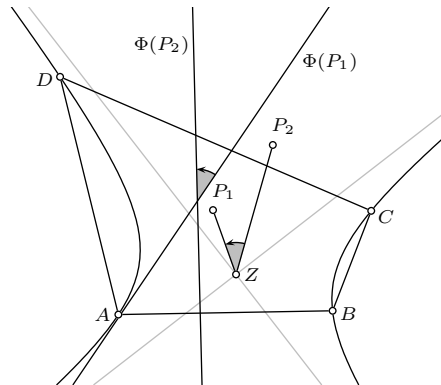


Fig. 11

– Für irgend zwei Punkte  $P_1, P_2$  gilt:  $\angle \Phi(P_1)\Phi(P_2) = \angle P_2ZP_1$ ,

und

– Die Parallele durch  $Z$  zur *F-Geraden*  $\Phi(P)$  irgend eines Punktes  $P$  ist bezüglich der Achse der Gleichseitumhyperbel von  $ABCD$  symmetrisch zur Geraden  $ZP$ .

Unser Interesse gilt nun der Frage: Wie verhalten sich bei dieser Abbildung  $\Phi$  die Punkte einer Geraden, die Punkte eines Kreises...?

Vierecke mit einem Umkreis sind uninteressant, da bei ihnen die *F-Gerade* jedes Punktes durch den Mittelpunkt läuft. Bei den folgenden Betrachtungen wird dieser Grenzfall nicht weiter beachtet.

1)

Die  $F$ -Geraden bez. eines Vierecks  $ABCD$  aller Punkte einer Geraden  $g$  hüllen eine Parabel ein, deren Brennpunkt der Tangentialpunkt  $T$  von  $ABCD$  ist (Fig 12).

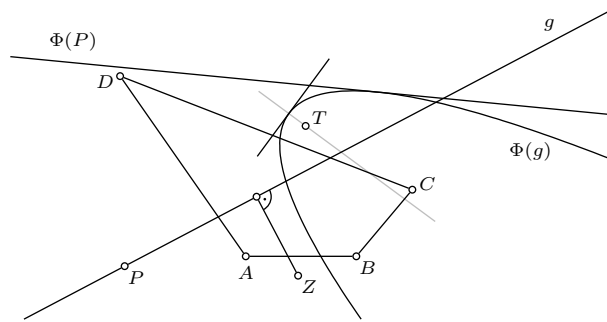


Fig. 12

Die Scheiteltangente dieser Parabel  $\Phi(g)$  ist die  $F$ -Gerade des Lotfusspunkts von  $Z$  aus auf  $g$ .

Und hier gilt auch für irgend einen fest gewählten Umkegelschnitt  $\mathcal{K}$  des Vierecks  $ABCD$ : Bei der Bewegung des Punktes  $P$  auf  $g$ , bewegt sich auch der  $F$ -Punkt von  $P$  bezüglich  $\mathcal{K}$  auf einer Tangente der Parabel  $\Phi(g)$ .

Der Winkel zwischen den Achsen der Parabeln  $\Phi(g_1)$ ,  $\Phi(g_2)$  zweier Geraden  $g_1, g_2$  ist entgegengesetzt dem Winkel zwischen  $g_1, g_2$ .

Ausnahmesituation bei Geraden durch  $Z$ .

Die Punkte  $P$  einer Geraden  $g$  durch  $Z$  (Fig. 13) haben alle (abgesehen von  $Z$ ) parallele  $F$ -Geraden.

$\Phi(g)$  besteht also aus  $T$  ( $F$ -"Gerade" von  $Z$ ) und dem Fernpunkt aller  $\Phi(P)$ .

Und das Verhältnis dreier Punkte  $P_1, P_2, P_3$  auf  $g$  ist gleich dem Verhältnis ihrer  $F$ -Geraden  $\Phi(P_1)$ ,  $\Phi(P_2)$ ,  $\Phi(P_3)$ .

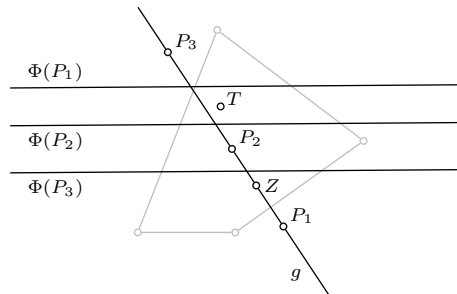


Fig. 13

So wird es möglich, mit *Cabri* auch umgekehrt zu einer Geraden den Punkt  $P$  zu konstruieren, dessen  $F$ -Gerade sie ist:

Zuerst konstruiert man die Gerade durch  $Z$ , auf der  $P$  liegen muss, dann bekommt man  $P$  mit Hilfe zweier Punkte  $P_1, P_2$  auf ihr, indem man diese Verhältnissgleichheit ausnützend.

Es stellt sich jetzt auch die Frage, wie zu einem Punkt  $Y$  auf  $\Phi(P)$ , bei gegebenem Viereck  $ABCD$  und gegebenem Punkt  $P$ , der Umkegelschnitt  $\mathcal{K}$  von  $ABCD$  gefunden wird, zu dem  $Y$ , als  $F$ -Punkt von  $P$ , gehört.

Die Konstruktion ist einfach, denn der Zusammenhang zwischen der Tangente an  $\mathcal{K}$  in einer der Ecken von  $ABCD$  (z.B. in  $A$ ) und dem  $F$ -Punkt von  $P$  ist projektiv: Man konstruiert für drei Kegelschnitte die  $F$ -Punkte und überträgt das Doppelverhältnis, das sie mit  $Y$  bilden, auf die Tangenten in  $A$ .

Aufgabe

Das Dreieck  $\Phi(P_1)\Phi(P_2)\Phi(P_3)$ , gebildet durch die  $F$ -Geraden dreier Punkte  $P_1, P_2, P_3$  bezüglich eines Vierecks  $ABCD$ , wird betrachtet.

Man zeige, dass das Fusspunktdreieck des Tangentialpunkts von  $ABCD$  in diesem Dreieck gegensinnig ähnlich ist dem Dreieck  $P_1P_2P_3$ .

Mit welcher Streckspiegelung können die beiden Dreiecke ineinander übergeführt werden?

2)

Die  $F$ -Geraden aller Punkte eines Kreises  $\mathcal{K}$  hüllen einen Kegelschnitt ein (Fig. 14).

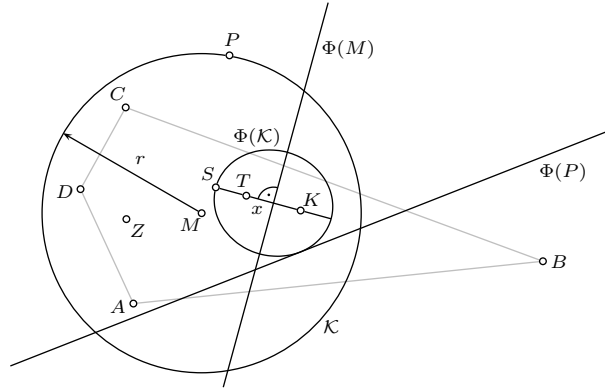


Fig. 14

Der Tangentialpunkt  $T$  von  $ABCD$  ist einer der Brennpunkte von  $\Phi(\mathcal{K})$ , die  $F$ -Gerade  $\Phi(M)$  des Mittelpunkts  $M$  von  $\mathcal{K}$  ist die Nebenachse.

Der zweite Brennpunkt  $K$  von  $\Phi(\mathcal{K})$ , das Spiegelbild von  $T$  an  $\Phi(M)$ , gehört also zum Punkt  $M$ , ganz unabhängig vom Radius  $r$  von  $\mathcal{K}$ .

(Übrigens, die Zuordnung  $M \mapsto K$  ist eine Streckspiegelung, deren Zentrum ein Punkt des Vierecks  $ABCD$  ist, der wohl weitere Beachtung verdient.

So teilt z.B. die Gerade durch dieses Streckungszentrum  $E$  und den Schwerpunkt von  $ABCD$  die Strecke  $ZT$  im Verhältnis  $-\frac{1}{2}$ .

Oder man nehme irgend ein Teildreieck von  $ABCD$ : Es sei  $U$  dessen Umkreismittelpunkt,  $y$  dessen Umkreisradius,  $F$  dessen Feuerbachpunkt (Neunpunktekreisradius), und  $d$  sei die Distanz  $TU$ . Das Streckungszentrum  $E$  liegt auf dem Apollonischen Verhältniskreis über  $UF$  für das Verhältnis  $\frac{2d}{y}$ .

Und, was besonders verblüfft: Wenn die Lage des Kreises  $\mathcal{K}$  verändert wird, bei gleich bleibendem Radius  $r$ , dann ändert sich wohl die Form des Kegelschnitts  $\Phi(\mathcal{K})$ , nicht aber die Länge seiner Hauptachse (der Strecke  $x$  vom Zentrum zum Hauptscheitel).

$$x^2 = \frac{(-1 + abcd)^2}{(1 + abcd)^2} \cdot r^2 = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \cdot r^2 \quad (\sigma: \text{Sigmazahl des Vierecks } ABCD [2]).$$

Zwei spezielle Fälle:

a) Kreise um  $Z$  gehen über in Kreise um  $T$ .

b) Kreise, die durch  $Z$  gehen, gehen über in Geradenbüschel. Der Kreis um  $M$ , der durch  $Z$  geht, geht über in das Geradenbüschel, mit dem Büschelpunkt  $K$ , symmetrisch zu  $T$  bezüglich  $\Phi(M)$ , zusammen mit  $T$  (Fig. 15).

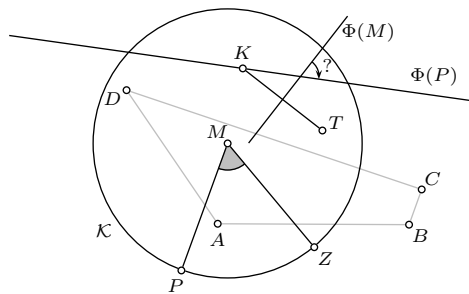


Fig. 15

Und es gilt:

$$\angle \Phi(M)\Phi(P) = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle ZMP.$$

Der Umkreis des Diagonaldreiecks von  $ABCD$  (er geht durch  $Z$ ) wird abgebildet in das Geradenbüschel, dessen Büschelpunkt der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks ist.

3)

Und wenn nun der Punkt  $P$  einen Kegelschnitt durchläuft?

Da zeigt *Cabri* keine einfache Kurve.

Die Sachlage wird aber sofort übersichtlich und verständlich, wenn bei der Bewegung des Punktes  $P$  auf einer vorgegebener Kurve man speziell den Weg verfolgt, den der Fusspunkt des Lots vom Tangentialpunkt  $T$  auf die  $F$ -Gerade von  $P$  beschreibt.

Im Fall " $P$  auf Gerade  $g$ " ist es die Scheiteltangente der Parabel  $\Phi(g)$ , im Fall " $P$  auf Kreis  $\mathcal{K}$ " ist es der Hauptscheitelkreis des Kegelschnitts  $\Phi(\mathcal{K})$ .

Und im Fall " $P$  auf Kegelschnitt  $\mathcal{K}$ " gibt es einen Kegelschnitt, der  $\mathcal{K}$  ähnlich ist und dessen Zentrum der Lotfusspunkt von  $T$  auf die  $F$ -Gerade des Zentrums von  $\mathcal{K}$  ist.

Einfache Erklärung dieser auf den ersten Blick überraschende Tatsache:

Die Abbildung, die dem Punkt  $P$  den Fusspunkt  $P^*$  des Lots vom Tangentialpunkt  $T$  auf die  $F$ -Gerade  $\Phi(P)$  zuordnet, ist eine Streckspiegelung.

Für  $P(u, v, 1)$  ergibt sich:  $P^*(a + b + c + d - (1 - abcd)u, bcd + cda + dab + abc + (1 - abcd)v, 1 + abcd)$ .

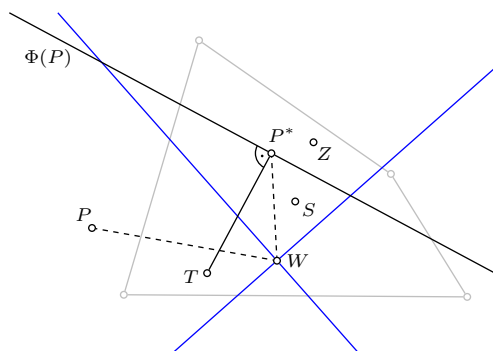


Fig. 16

Das Zentrum  $W$  dieser Streckspiegelung (Fig. 16) ist der Spiegelpunkt von  $Z$  am Schwerpunkt  $S$  von  $ABCD$ , die Achsen verlaufen parallel zu den Asymptoten der Gleichseitumhyperbel von  $ABCD$ , und das Bild des Punktes  $Z$  ist der Punkt  $T$ .

So werden einige Details von 1) und 2) sofort verständlich. Die Rückwärtskonstruktion  $\Phi(P) \mapsto P$ , zum Beispiel, wird einfacher.

## 6

Zum Schluss ein weiterführendes Experiment.

Man kann doch auch gleichzeitig mit zwei Vierecken arbeiten (Fig. 17).

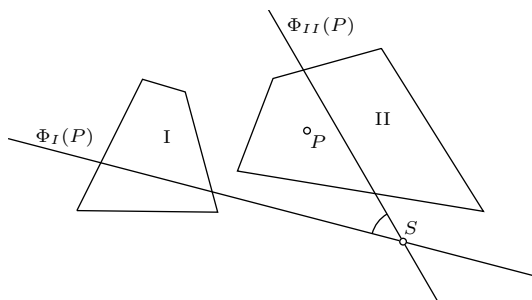


Fig. 17

Wie wirken die beiden  $F$ -Geraden eines Punktes  $P$  bezüglich der Vierecke I und II zusammen?

Gibt es Punkte  $P$ , deren Geradenpaar  $\Phi_I(P)$ ,  $\Phi_{II}(P)$  einen vorgegebenen Winkel einschliesst?

Ja, es gilt der Satz:

Die Punkte  $P$ , für welche  $\angle(\Phi_I(P)\Phi_{II}(P)) = \omega$  ist, liegen auf einem Kreis. Dieser Kreis  $\mathcal{K}_\omega$  geht durch die beiden Gleichseitumhyperbelzentren  $Z_I$ ,  $Z_{II}$  von I und II.

Wenn sich  $P$  auf  $\mathcal{K}_\omega$  bewegt, beschreibt der Schnittpunkt  $S$  der beiden  $F$ -Geraden auch einen Kreis  $k$ , und der Mittelpunkt dieses Kreises bewegt sich auf einem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$ , wenn  $\omega$  verändert wird.



Dazu noch einige Details.

- Der Kreis  $\mathcal{K}_\omega$  hängt nur vom Winkel  $\omega$ , dem Winkel der Hauptachsen der beiden Gleichseitumhyperbelzentren und der gegenseitigen Lage ihrer Zentren ab.
- Wenn die Vierecke I und II beide Kreisvierecke sind, also jedes einen Umkreis hat, ist  $\mathcal{K}$  die Mittelsenkrechte der Umkreismittelpunkte.
- Wenn die Vierecke in einem gemeinsamen Umkegelschnitt liegen, ist  $\mathcal{K}$  die Mittelsenkrechte ihrer Tangentialpunkte.
- Wenn das Viereck II das Mittelsenkrechtenviereck des Vierecks I ist, steht der Kreis  $k$  orthogonal auf dem Thaleskreis über  $TZ_{II}$ , der Strecke vom Tangentialpunkt  $T$  (beide Vierecke haben denselben) zum Gleichseitumhyperbelzentrum  $Z_{II}$ , und  $\mathcal{K}$  ist die Gerade  $TZ_{II}$ .

Schliesslich noch die Frage:

Was lässt sich zu den beiden  $F$ -Parabeln einer Geraden  $g$  bez. zweier Vierecke I und II sagen? Für jede Gerade gilt

$$\sphericalangle \text{Achse von } \Phi_I(g) \text{ Achse von } \Phi_{II}(g) = \sphericalangle \Phi_I(Z_{II}) \Phi_{II}(Z_I),$$

wobei  $\Phi_I(g)$  die Parabel von  $g$  bez. I ist,  $\Phi_I(Z_{II})$  die  $F$ -Gerade des Gleichseitumhyperbelzentrums von II bez. I...

Nachtrag

Ein weiterer Aspekt der Frégier-Viereckstheorie eröffnet sich, wenn man, bei festem Viereck  $ABCD$  und festem Punkt  $P$  und vorgegebem Umkegelschnitt  $\mathcal{K}$  von  $ABCD$ , sich nicht mit dem  $F$ -Punkt von  $P$  bezüglich  $\mathcal{K}$  "begnügt", sondern auch noch dessen Polare bezüglich  $\mathcal{K}$  betrachtet. Diese Polare hüllt nämlich, wenn  $\mathcal{K}$  variiert, einen Kegelschnitt ein.

Dieser zum Punkt  $P$  und dem festen Viereck  $ABCD$  gehörende Kegelschnitt  $\mathcal{K}_P$  liegt zwar auf den ersten Blick recht beziehungslos in der Ebene. Eine genauere Erforschung kann sich aber durchaus lohnen.

So bilden zum Beispiel, wenn man für  $P$  gerade die Ecken des Vierecks  $ABCD$  nimmt, die Zentren  $M_A, M_B, \dots$  der zugehörigen Kegelschnitte  $\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B, \dots$  ein Viereck, das dem Viereck  $ABCD$  (gegensinnig) ähnlich ist, und die  $F$ -Geraden von  $M_A, M_B, \dots$  bezüglich  $ABCD$  sind die Mittelsenkrechten zwischen  $A, B, \dots$  und dem Tangentialpunkt von  $ABCD$ .

## Literatur

- [1] Stärk Roland/Baumgartner Daniel: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. Praxis der Mathematik, PM44 (2002) 19-27. Aulis Verlag, Köln.
- [2] Stärk R.: Eine merkwürdige Zahl des Vierecks. Praxis der Mathematik, PM46 (2004) 26-31. Aulis Verlag, Köln.
- [3] Stärk R.: Vierecke mit ihrem Tangentialpunkt im Zusammenspiel mit Kurven dritter Ordnung. [www.geometria.ch](http://www.geometria.ch)
- [4] Laborde J.- M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
- [5] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1988.

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk  
Im Santenbühl 3  
CH-8234 Stetten  
[roland.staerk@sunrise.ch](mailto:roland.staerk@sunrise.ch)