Isogonalkreise dreier Kreise

Roland Stärk, 2018

Publiziert auf www.geometria.ch

Der Schnittwinkel zweier sich schneidender Kreise ist der Winkel, den die in den Schnittpunkten zusammenstossenden Kreisradien einschliessen (Fig. 1).
Die Tangentenkreuze in den beiden Schnittpunkten schliessen, orthogonal zu den Radien, den Schnittwinkel und seinen Supplementwinkel ein.

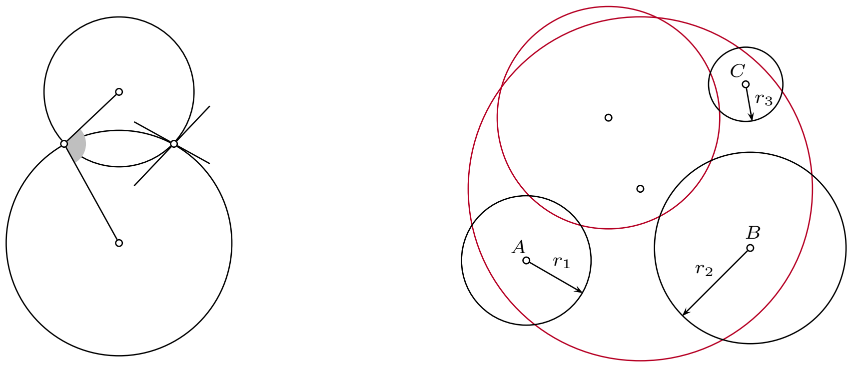

Fig. 1

Gegeben seien drei Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Mittelpunkten A, B, C und den Radien r_1, r_2, r_3,

Gesucht sind, und konstruiert werden sollen Kreise, die diese drei Grundkreise alle mit kongruenten Tangentenkreuzen schneiden, die also mit jedem der Kreise einen einheitlichen Schnittwinkel φ oder dessen Supplement $180° - \varphi$ haben.

In der Figur sind, für den Schnittwinkel $45° / 135°$, zwei solche (der insgesamt 8, wie sich zeigen wird) Isogonalkreise eingezeichnet.

Ein Sonderfall: Für den Schnittwinkel $90°$ gibt es einen einzigen Isogonalkreis, den immer wieder wichtigen, mit Hilfe der Potenzgeraden der Kreispaare konstruierbaren Orthogonalkreis von k_1, k_2, k_3.

Und natürlich der prominenteste Fall: Schnittwinkel $0°/180°$, das Apollonische Kreisproblem (Apollonius von Perge 262-190 v.Chr.).

Nach dem Cosinussatz ist der cos des Schnittwinkels φ zweier sich schneidender Kreise, mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und den Radien r_1, r_2,

$$\cos(\varphi) \;=\; \frac{r_1^2 + r_2^2 - \overline{M_1M_2}^2}{2r_1r_2}\,.$$

Für einen Isogonalkreis in der Fig. 1, mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, welcher...

Fall 1: ... mit allen drei Kreisen k_1, k_2, k_3 denselben Schnittwinkel hat, muss somit gelten

$$\underbrace{\frac{r^2 + r_1^2 - \overline{MA}^2}{2r\,r_1}}_{x_1} \;=\; \underbrace{\frac{r^2 + r_2^2 - \overline{MB}^2}{2r\,r_2}}_{x_2} \;=\; \underbrace{\frac{r^2 + r_3^2 - \overline{MC}^2}{2r\,r_3}}_{x_3}$$

Da der cos eines Winkels und der cos seines Supplementwinkels entgegengesetzt(gleich) sind, müssen drei weitere Fälle in Betracht gezogen werden

Fall 2: $\quad -x_1 = x_2 = x_3$
Fall 3: $\quad x_1 = -x_2 = x_3$
Fall 4: $\quad x_1 = x_2 = -x_3\,.$

Vorerst befassen wir uns nur mit dem Fall 1.

Rechnung mit baryzentrischen Koordinaten: Grunddreieck ABC, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Begleitung der Rechnung mit einer *Cabri*-Figur [1].

Es sei $M = (t_1, t_2, t_2)$.
Wenn man im Fall 1 aus den beiden Gleichungen $x_1 - x_2 = 0$ und $x_1 - x_3 = 0$ den Radius r eliminiert, ergibt sich eine lineare Gleichung für t_1, t_2, t_3.

Der geometrische Ort für den Mittelpunkt M der Isogonalkreise ist somit eine Gerade.
Diese Gerade w enthält speziell auch das Potenzzentrum P der Kreise k_1, k_2, k_3, den Mittelpunkt des Orthogonalkreises, denn dieser gehört ja (in jedem der vier Fälle) dazu.
Und für einen Punkt M auf w lässt sich dann der zugehörige Radius r berechnen.

Was lässt sich weiter über die Gerade w sagen?
Man wird mit der *Cabri*figur experimentieren: Von dort Zahlenwerte für a, b, c, r_1, r_2, r_3 in die Rechnung nehmen und nachher w dort einzeichnen.

So kommt man – vielleicht sogar auch in Unkenntnis der Apolloniusaufgabe – zum folgenden schönen Resultat (Fig. 2).

Satz:
Der Mittelpunkt M eines Isogonalkreises, der alle drei Kreise k_1, k_2, k_3 mit gleichem Schnittwinkel schneidet, liegt auf der Geraden w, die durch das Potenzzentrum P von k_1, k_2, k_3 geht und orthogonal ist zur äusseren Ähnlichkeitsachse ae von k_1, k_2, k_3.
Diese Isogonalkreise bilden ein Büschel, ae ist dessen Potenzgerade.

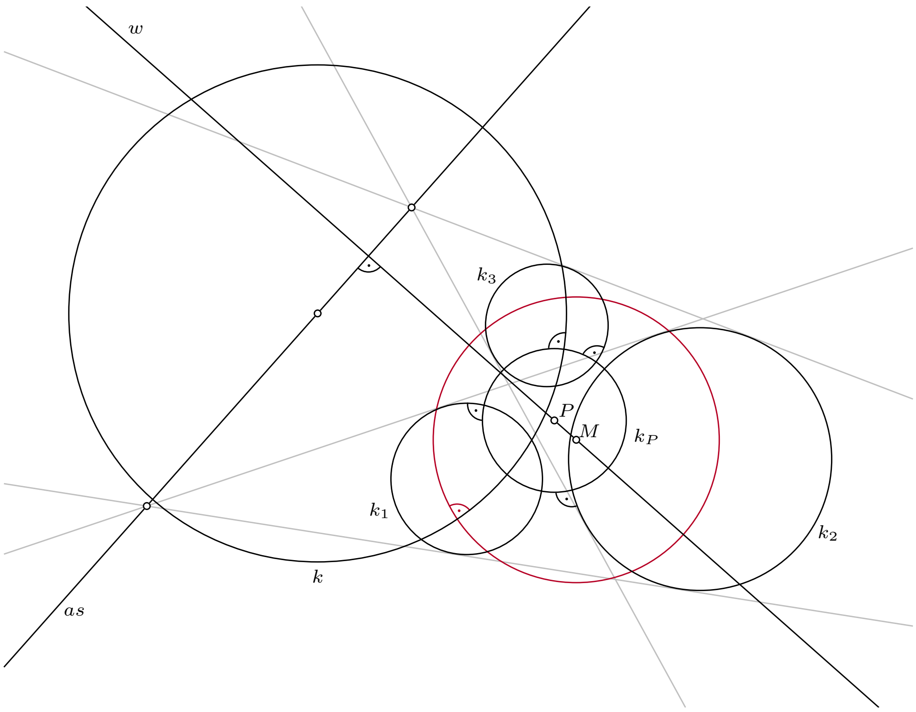

Fig. 2

Will man zu einem vorgegebenem Punkt M auf w den zugehörigen Isogonalkreis konstruieren, so macht man dies am besten mit Hilfe eines Kreises des konjugierten Büschels, also mit einem Kreis k, dessen Mittelpunkt auf ae liegt und der orthogonal zum Orthogonalkreis k_P von k_1, k_2, k_3 ist. Die Isogonalkreise sind orthogonal zu k.

Es stellt sich noch die Frage, wie ein Isogonalkreis konstruiert wird, wenn nicht sein Mittelpunkt, sondern sein Schnittwinkel mit k_1, k_2, k_3 vorgegeben ist
Die Fig. 3 zeigt einen Weg.

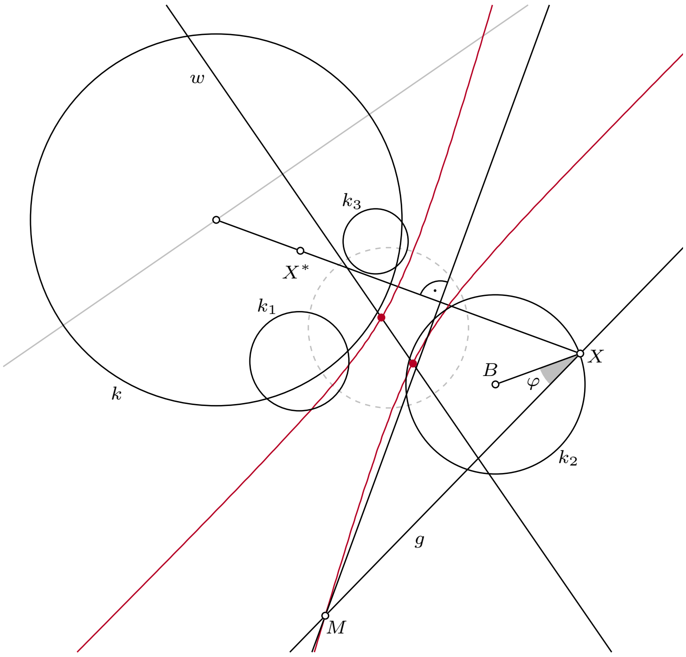

Fig. 3

Man wählt auf einem der Kreise k_1, k_2, k_3, z.B. auf k_2, einen Punkt X und legt in ihm den vorgegebenen Schnittwinkel $\varphi = \measuredangle BXg$ an den Radius BX. Der Mittelpunkt M des gesuchten Isogonalkreises muss auf g liegen. X^* sei der zu X inverse Punkt bezüglich des Kreises k. Weil der Isogonalkreis orthogonal ist zu k, muss M auch auf der Mittelsenkrechten von XX^* sein. Aber der Schnittpunkt der beiden Geraden liegt nun nicht einfach, wie gewünscht, auf w. X sollte richtig platziert sein. Wenn X sich auf k_2 bewegt, beschreibt M eine Hyperbel. Die Schnittpunkte dieser Hyperbel mit w sind die beiden Mittelpunkte M.

Mit *Cabri* lässt sich leicht eine Prozedur machen, die bei gegebenem Winkel φ zu k_1, k_2, k_3, w und k diese Hyperbel zeichnet, und die dann auch in den drei weiteren Fällen 2,3,4 benutzt werden kann, mit dem Ziel, eine universelle Konstruktion für alle $4 \cdot 2 = 8$ Isogonalkreise, die den vorgegebenen Schnittwinkel $\varphi \,/\, 180° - \varphi$ haben, zu machen, eine Prozedur, bei der nebst φ einzig die Kreise k_1, k_2, k_3 angetippt werden müssen.

Dass damit nun auch, mit $\varphi = 0$, eine Lösung des Apollonischen Problems vorliegt, vorerst für den Fall 1, ist klar.

Aber die Fälle 2,3,4 brauchen gar nicht erst weiter behandelt zu werden. Bei ihnen geht alles gleich, sogar etwas einfacher, mit elliptischen Kreisbüscheln. Die inneren drei Ähnlichkeitsachsen der Kreise k_1, k_2, k_3 sind die Potenzgeraden.

Literatur

[1] Laborde J.– M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH-8234 Stetten
roland.staerk@sunrise.ch