Einem Kegelschnitt Dreiecke einschreiben, deren Höhenschnittpunkt ein vorgegebener Punkt ist

Roland Stärk, 2018

Publiziert auf `www.geometria.ch`

Die folgende Miniatur soll zeigen, wie das Computersystem *Cabri* [2] – dieses für die Elementargeometrie so nützliche Konstruktionsverfahren – ein kleines Problem auf elegenate Weise lösen kann.

Es geht um die Aufgabe:

Gegeben sind eine Ellipse e und in ihrem Innern ein Punkt H. Dieser Ellipse sollen Dreiecke ABC eingeschrieben werden, deren Höhenschnittpunkt der Punkt H ist (Fig. 1).

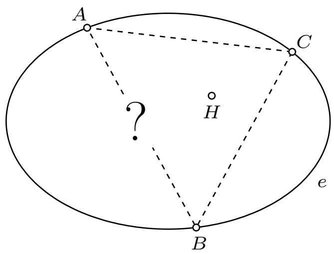

Fig. 1

Vermutlich kann eine Ecke des Dreiecks beliebig gewählt werden, davon gehen wir aus und wählen irgendwo die Ecke C.

Die Gegenseite AB muss orthogonal sein zur Geraden $g = HC$, man weiss aber nicht wo (Fig. 2).

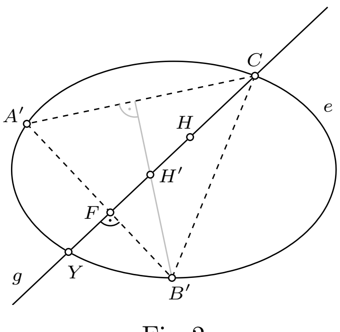

Fig. 2

Den Punkt F irgendwo auf g wählen, die Senkrechte in F zu g mit e schneiden: A', B' und den Höhenschnittpunkt H' des Dreiecks $A'B'C$ konstruieren.

Wenn die Lage von F auf g verändert wird, bewegt sich auch H'. Nähert sich F dem Punkt Y, dem zweiten Schnittpunkt von g mit e, dann kommt auch H' in die Nähe, verschiebt man F gegen H, dann eilt H' voraus.

Jetzt kommt *Cabri* zum Einsatz.

Cabri kann das Zusammenspiel der Punkte F und H' anschaulich zeigen.

Zuerst muss aber noch der Thaleskreis k über der Strecke FH' eingezeichnet werden. *Cabri* kann nämlich den geometrischen Ort des Kreises k, bei der Bewegung von F auf g, sichtbar machen. Was zeigt *Cabri*? (Fig. 3)

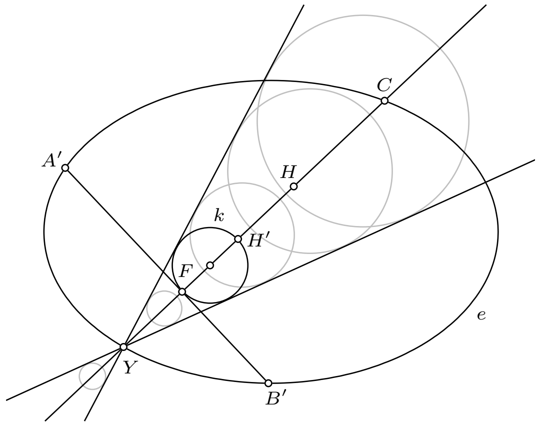

Fig. 3

Einen Trichter, gefüllt mit Kreisen! Die Spitze des Trichters ist Y. Das gesuchte Dreieck kann gezeichnet werden.

Der Kreis k muss vom Punkt Y aus gestreckt werden, bis H' mit H zusammenfällt.

Eine einfache Sache.

Dazu der begleitende analytische Beweis.

$e\colon b^2t_1^2 + a^2t_2^2 - a^2b^2t_3^2 = 0$, homogene Cartesische Koordinaten t_1, t_2, t_3
$b = 1$
$C(a(m^2-1), 2m, 1+m^2)$
$H(u, v, 1)$
$F = C + n \cdot H$
usw.
(mit *Mathematica* [3])
Es muss bewiesen werden, dass das Verhältnis der drei Punkte H', F, Y unabhängig von n ist.

Ein Grenzfall unseres Problems liegt vor, wenn der Punkt H genau auf der Ellipse e plaziert wird. Das ist dann Frégier-Theorie [1].
Kann H auch ausserhalb von e liegen, und muss e überhaupt eine Ellipse sein?

Wie verhalten sich, wenn das Dreieck ABC in der Ellipse e bewegt wird, die Seitengeraden BC, CA, AB? Was hüllen sie ein?
Darüber gibt *Cabri* auch bereitwillig Auskunft.

Und dann kann natürlich noch weiter geforscht werden.
Wie verhalten sich gewisse merkwürdige Punkte der e eingeschriebenen Dreiecke, wenn C auf e bewegt wird (z.B. der Umkreismittelpunkt oder, wenn H auf e liegt, der Lemoinepunkt)?

Und wie verhält sich die zu e bezüglich des Dreiecks ABC isogonalkonjugierte Gerade?
Man wird ein *Cabri*-Makro herstellen, das automatisch zu e, H und C das Dreieck ABC liefert.

[1] Stärk R.: Frégier-Punkt und Frégier-Gerade. www.geometria.ch
[2] Laborde J.– M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
[3] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer.
Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1988.

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH-8234 Stetten
`roland.staerk@sunrise.ch`