

VIERECKE MIT IHREM TANGENTIALPUNKT IM ZUSAMMENSPIEL MIT KURVEN DRITTER ORDNUNG

Roland Stärk, 2017

Publiziert auf www.geometria.ch

Der *Tangentialpunkt* eines (allgemeinen) Vierecks $ABCD$ (Fig. 1) - der wohl Bedeutendste unter den "Merkwürdigen Punkten" eines Vierecks - ist der Punkt T , der die folgenden Winkelformeln alle erfüllt.

$$\begin{aligned} \angle ATB &= \angle ACB + \angle ADB \\ \angle ATC &= \angle ABC + \angle ADC \\ &\vdots \\ \angle XTY &= \angle XZY + \angle XWY, \{X, Y, Z, W\} = \{A, B, C, D\} \end{aligned}$$

(Orientierte Winkel, modulo 180°)

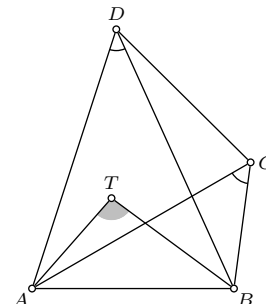


Fig. 1

Auf elegante Weise kann der Tangentialpunkt eines Vierecks $ABCD$ so konstruiert werden:

Man wählt eine Ecke aus, egal welche, zum Beispiel D . Diese wird beim Dreieck ABC , gebildet durch die drei anderen Ecken, isogonal abgebildet: D^* .

(Der zu einem Punkt P bezüglich eines Dreiecks ABC isogonal konjugierte Punkt P^* ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks, das gebildet wird durch die Spiegelbilder des Punktes P an den Geraden AB, BC, CA).

Dann invertiert man D^* noch am Umkreis des Dreiecks ABC [1].

Mit dem Wort "konstruieren" ist hier in dieser Abhandlung "konstruieren in einem System wie *Cabri*" gemeint [2].

Es empfiehlt sich, für Detailkonstruktionen laufend Makros herzustellen, die später wieder verwendet werden können, denn gerade bei Kurven dritter Ordnung setzen sich Konstruktionen schnell aus vielen Teilen zusammen.

Hier "Isogonalabbildung eines Punktes in einem Dreieck" und "Tangentialpunkt eines Vierecks".

Die Fig. 2 zeigt ein bequemes Verfahren, eine *Kurve dritter Ordnung* \mathcal{C}_3 zu konstruieren.

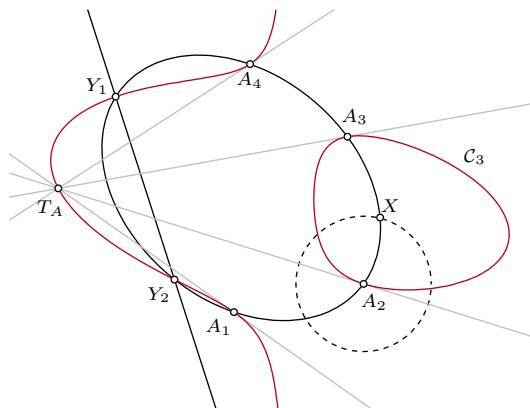


Fig. 2

Man wählt vier Punkte: A_1, A_2, A_3, A_4 und dazu noch einen Punkt T_A . Durch A_1, A_2, A_3, A_4 wird ein variabler Kegelschnitt \mathcal{K} gelegt. Die Beweglichkeit von \mathcal{K} kann erreicht werden mit Hilfe eines um einen der Punkte gelegten Kreises, auf dem ein Punkt X sich bewegt. Die Schnittpunkte Y_1, Y_2 der Polaren von T_A bez. \mathcal{K} mit \mathcal{K} erzeugen die \mathcal{C}_3 .

Die so konstruierte \mathcal{C}_3 berührt die Geraden $T_A A_i$ in A_i .

Vier Punkte einer \mathcal{C}_3 , deren Tangenten in einem gemeinsamen Punkt von \mathcal{C}_3 zusammenlaufen, bilden ein sogenanntes "T-Viereck" der \mathcal{C}_3 .

Wenn der gemeinsame Tangentendrittpunkt T_A des T -Vierecks $A_1A_2A_3A_4(T_A)$ gerade der Tangentialpunkt von $A_1A_2A_3A_4$ ist, dann ist die \mathcal{C}_3 eine *Zirkularkurve dritter Ordnung* (Abkürzung: \mathcal{Z}_3). Das Wort "zirkular" sagt, dass auch die unendlich fernen Kreispunkte die Gleichung erfüllen (in einem homogenen Cartesischen Koordinatensystem sind dies die Punkte $(1, i, 0)$ und $(1, -i, 0)$).

Bei einer \mathcal{Z}_3 ist der Tangentendrittpunkt jedes T -Vierecks dessen Tangentialpunkt.

Die \mathcal{Z}_3 's sind unter den \mathcal{C}_3 's besonders wichtig, da sie elementarer, zugänglicher sind für geometrische Untersuchungen, vergleichbar den Kreisen unter den Kegelschnitten.

Mit dem hier vorgeführten Verfahren werden also \mathcal{C}_3 's, welche T -Vierecke besitzen, konstruiert. Will man ein Beispiel einer anderen \mathcal{C}_3 haben, so kann man einfach eine Hyperbel an einem Kreis um einen ihrer Punkte invertieren [3].

Einige grundlegende Sätze zum konstruktiven Umgang mit \mathcal{C}_3 's

(Wir beschränken uns auf \mathcal{C}_3 's, die T -Vierecke besitzen).

(1)

Die Diagonalpunkte G_1, G_2, G_3 eines einer \mathcal{C}_3 eingeschriebenen T -Vierecks $A_1A_2A_3A_4(T_A)$ liegen auch auf der \mathcal{C}_3 (Fig. 3).

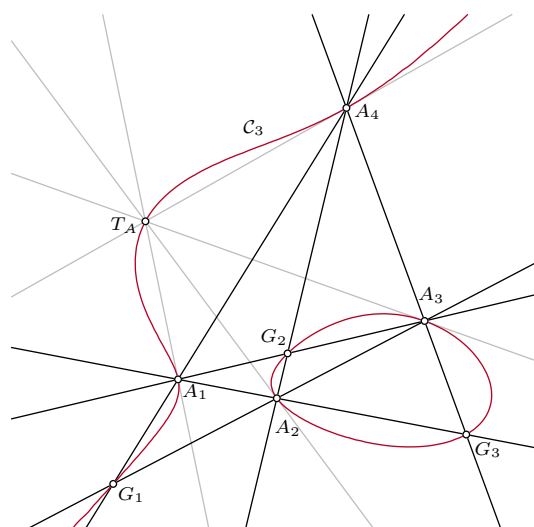


Fig. 3

(2)

Die drei Diagonalpunkte G_1, G_2, G_3 und der gemeinsame Tangentendrittpunkt T_A eines einer \mathcal{C}_3 eingeschriebenen T -Vierecks $A_1A_2A_3A_4(T_A)$ sind korrespondierend (Zwei Punkte einer \mathcal{C}_3 heißen korrespondierend, wenn sie denselben Tangentialpunkt haben). Sie bilden zusammen also auch ein T -Viereck. Man zeichne in Gedanken oben in der Fig. 3 die zusammenlaufenden Tangenten ein.

Wie der dazugehörige, gemeinsame Tangentendrittpunkt konstruiert wird, folgt in (7).

Auf Beweise für Sätze, wie hier, kann verzichtet werden.

Man kann für \mathcal{C}_3 die allgemeine Gleichung dritten Grades ansetzen und deren Koeffizienten so bestimmen, dass das Ausgangsviereck $A_1A_2A_3A_4(T_A)$ ein T -Viereck wird, usw.

Der etwas schwerfällige Weg – auch mit Computer-Unterstützung.

(Wir arbeiten mit *Mathematica* [4]).

(6)

In der Fig. 7 sind für zwei Punkte P, Q auf \mathcal{C}_3 , wie oben, die korrespondierenden Punkte P_2, Q_2 eingezeichnet.

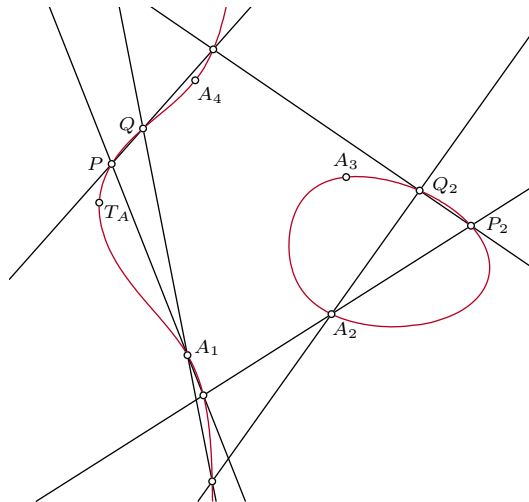


Fig. 7

Überrascht stellt man fest, dass die Geraden PQ und P_2Q_2 sich auf \mathcal{C}_3 treffen. So wird der dritte Schnittpunkt einer Geraden mit \mathcal{C}_3 , von welcher schon zwei bekannt sind, konstruiert.

(7)

Wie wird die Tangente in einem Punkt P einer durch ein T -Viereck $A_1A_2A_3A_4(T_A)$ gegebenen \mathcal{C}_3 konstruiert?

Man konstruiert wie bei (5) die drei zu P korrespondierenden Punkte P_2, P_3, P_4 , nimmt dann einen der Diagonalpunkte U_1, U_2, U_3 des Vierecks $PP_2P_3P_4$, z.B. $U_1 = PP_4 \cap P_2P_3$ und konstruiert den vierten zu U_1 korrespondierenden Punkt, dieser ist T_P .

Bei einer \mathcal{Z}_3 ist T_P der Tangentialpunkt des Vierecks $PP_2P_3P_4$.

(8)

Durch drei kollineare Punkte P_1, P_2, P_3 einer \mathcal{C}_3 ist je eine Gerade gelegt: g_1, g_2, g_3 . Sie schneiden \mathcal{C}_3 noch in je zwei Punkten (Fig. 8).

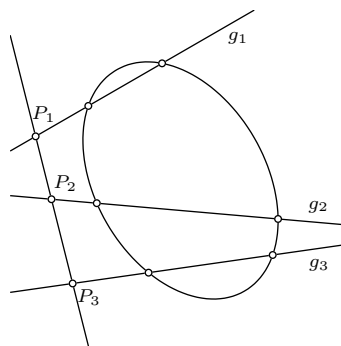


Fig. 8

Diese sechs Punkte liegen auf einem gemeinsamen Kegelschnitt.

(9)

Es fehlt noch die Lösung der Aufgabe:

Gegeben auf einer \mathcal{C}_3 ein T -Viereck $A_1A_2A_3A_4(T_A)$ und ein Punkt P , ferner eine durch P verlaufende Gerade f . Wie werden die beiden weiteren Schnittpunkte von f mit der \mathcal{C}_3 konstruiert?

Kurze Vorbetrachtung:

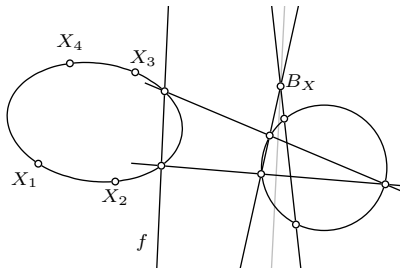


Fig. 9

Ein Kegelschnittbüschel, in der Fig. 9 das Büschel mit den Büschelpunkten X_1, X_2, X_3, X_4 , erzeugt bekanntlich auf einer Geraden f eine Involution, und diese Involution kann bei einem Hilfskreis mit einem Geradenbüschel erfasst werden. Zu jeder Geraden durch den Büschelpunkt B_X gehört ein Kegelschnitt des Büschels $X_1X_2X_3X_4$.

Wenn es gelingt, auf \mathcal{C} ein Punkte"gerüst", wie in Fig. 10 dargestellt, zu finden, lässt sich die Aufgabe lösen. Nach (8) enthält nämlich jedes der Kegelschnittbüschel $XXXX$ und $YYYY$ einen Kegelschnitt, der durch die beiden gesuchten Punkte auf f geht. Die Verbindungsgerade der beiden Büschelpunkte B_X und B_Y beim Hilfskreis liefert die Punkte.

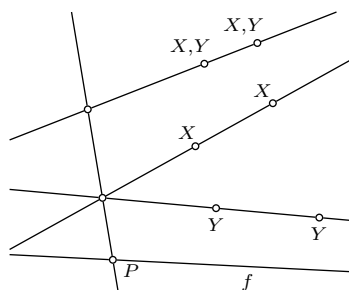


Fig. 10

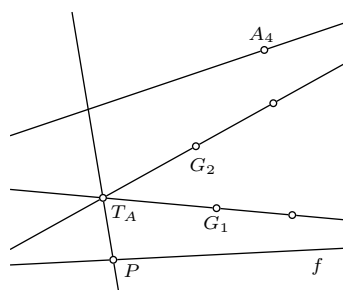


Fig. 11

Mit dem Gerüst Fig. 11 klappt es.

Bemerkung: Sollte eine auf einem T -Viereck $A_1A_2A_3A_4(T_A)$ basierende Prozedur einmal kein Resultat bringen, weil man bei ihrer Aufstellung nicht an jeden Ausnahmefall gedacht hat, z.B. hier, dass der Punkt P in der Fig. 11 kein Punkt A sein kann, dann hilft es manchmal, wenn man sich einfach auf der \mathcal{C}_3 ein anderes T -Viereck aufbaut, wie bei (7), und mit ihm die Prozedur dann durchführt.

Bei den nun folgenden **Anwendungen** geht es hauptsächlich um Vierecke, die zusammen mit einem ihrer Diagonalpunkte einer \mathcal{C}_3 eingeschrieben sind.

1

Durch einen Punkt W einer \mathcal{Z}_3 sind zwei Geraden f, g gelegt (Fig. 12). Es seien F_1, F_2 und G_1, G_2 ihre weiteren Schnittpunkte mit \mathcal{Z}_3 . Die Gerade f wird festgehalten, die Gerade g wird um W herumgedreht. Unser Interesse gilt dem Tangentialpunkt des sich verändernden Vierecks $F_1F_2G_1G_2$. Wie bewegt er sich?

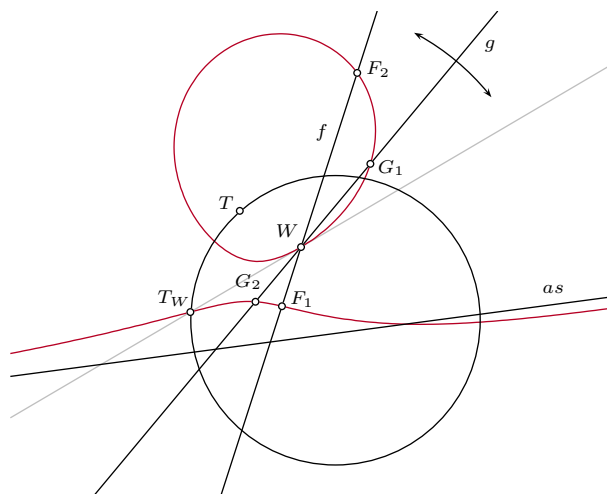


Fig. 12

Resultat:

Wenn f fest bleibt und g sich um W dreht, bewegt sich der Tangentialpunkt T des Vierecks $F_1F_2G_1G_2$ auf einem Kreis.

Dies ist bemerkenswert, denn andere merkwürdige Punkte des Vierecks, z.B. der Schwerpunkt oder das Gleichseitumhyperbelzentrum durchlaufen keine so einfachen Bahnen.

(Bei einer nichtzirkularen \mathcal{C}_3 ist auch die Bahn von T komplizierter).

Die Berechnung kann hier mit dem Ansatz $W = (0, 0, 1)$, $F_1 = (0, 1, 1)$, $F_2 = (0, v, 1)$ angefangen werden. Man berechnet die Koeffizienten der Gleichung dritten Grades für \mathcal{Z}_3 , die von W, F_1, F_2 und den Kreisfernpunkten erfüllt werden muss, usw.

Was lässt sich über den Kreis von T weiter sagen?

Er geht durch den Tangentendrittpunkt T_W von W .

Wie hängt er von W ab?

Wenn man ein *Cabri-Makro* herstellt und laufen lässt, das den zu einer Geraden f gehörenden Kreis liefert, kann man feststellen, dass bei festem W und drehender Geraden f sich der Kreismittelpunkt auf einer Gleichseitumhyperbel bewegt. Die Rechnung zeigt, dass ihr Zentrum die Mitte der Strecke von T_W zum singulären Brennpunkt Q von \mathcal{Z}_3 ist. (Der singuläre Brennpunkt einer \mathcal{Z}_3 ist der Schnittpunkt der Tangenten in den Kreisfernpunkten).

Die Rechnung ist allerdings nicht einfach, weil zwei quadratische Gleichungen vorkommen und die Tangentialpunktberechnung mit komplizierten, vielbuchstabigen Ausdrücken schwer durchführbar ist. Man wird sich deshalb bei solchen Berechnungen jeweils pragmatisch damit begnügen, für einige Buchstaben gleich von Anfang an konkrete Zahlen einzusetzen.

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn W der reelle Fernpunkt von \mathcal{Z}_3 ist. Dann verlaufen die Viereckseiten F_1F_2 und G_1G_2 parallel zur reellen Asymptote as von \mathcal{Z}_3 , und der T -Kreis ist der Umkreis des Steinerdreiecks von \mathcal{Z}_3 .

Bemerkenswert ist auch der Fall, wo W der Inkreis- oder ein Ankreismittelpunkt des Steinerdreiecks ist.

2

Gleiche Ausgangslage wie bei 1 (Fig. 13).

Durch einen Punkt W einer \mathcal{Z}_3 sind zwei Geraden f, g gelegt. Die Gerade f bleibt fest, die Gerade g wird um W herumgedreht. Hier betrachtet man aber nicht das durch f und g begrenzte Viereck, sondern g wird zuerst noch an f gespiegelt: g' , und untersucht wird das Viereck, gebildet durch die Schnittpunkte Y_1, Y_2 von g und Y_3, Y_4 von g' mit \mathcal{Z}_3 . Auch hier geht es um den Tangentialpunkt.

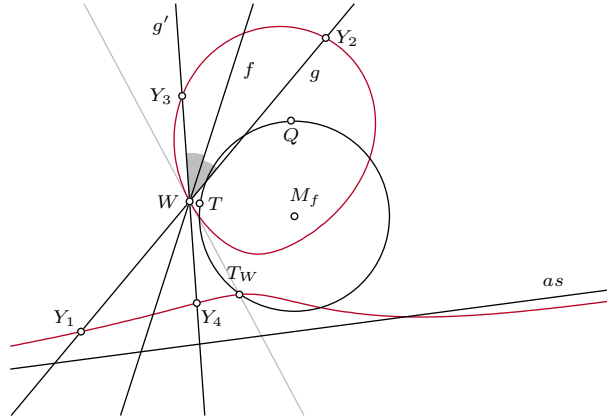


Fig. 13

Der Tangentialpunkt T des Vierecks $Y_1Y_2Y_3Y_4$ bewegt sich auf einem Kreis, wenn f festgehalten und g bewegt wird, wenn sich die "Schere" gg' öffnet und schliesst.

Dieser Kreis k_f läuft durch den Tangendrittpunkt T_W von W und durch den singulären Brennpunkt Q von \mathcal{Z}_3 .

Es sei M_f der Mittelpunkt von k_f . Beim Experimentieren mit verschiedenen Geraden f durch W zeigt sich, dass für zwei Geraden f_1, f_2 die Winkelformel

$$\angle M_{f_1} Q M_{f_2} = 2 \cdot \angle(f_1, f_2)$$

gilt.

Ferner gibt es eine Gerade f , genauer gesagt: ein Geradenkreuz $f_1 \perp f_2$, für welches k_f in die Gerade $T_W Q$ ausartet. Diese Geraden f_1, f_2 halbieren den Winkel zwischen der Geraden WT_W und der Orthogonalen von W zu as .

Erwähnt sei noch der ausgeartete Fall, wo die Zirkularkurve $\mathcal{Z}_3 = \mathcal{K} \cup \infty$ sich zusammensetzt aus einem Kegelschnitt und der Ferngeraden, und wo W ein Punkt der Ferngeraden ist (Fig. 14).

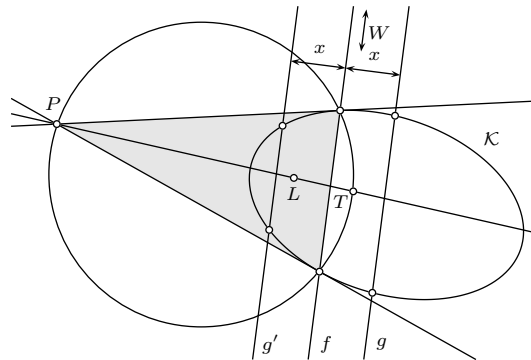


Fig. 14

Hier bleibt der Punkt T an Ort. Wo liegt er genau?

Man betrachte das Dreieck, gebildet durch f und die Tangenten an \mathcal{K} vom Pol P von f bez. \mathcal{K} aus. T liegt auf dem Umkreis des Dreiecks und auf der Geraden durch P und den Lemoinepunkt L des Dreiecks. (Der Lemoinepunkt eines Dreiecks ist der zum Schwerpunkt isogonalkonjugierte Punkt).

Interessant ist schliesslich noch die Frage:

Gibt es auf \mathcal{Z}_3 für ein T -Viereck $W_1W_2W_3W_4(T_W)$ in jeder Ecke W_i eine Gerade f_i , zu denen derselbe T -Kreis k_f gehört?

3

Hier soll ein einfacher Fall, eine ausgeartete \mathcal{Z}_3 , den Anfang machen: $\mathcal{Z}_3 = \mathcal{K} \cup g$, Kreis \mathcal{K} und Gerade g . Da lässt sich leichter rechnen.

Auf dem Kreis \mathcal{K} sind die Punkte E, F fest gegeben (Fig. 15). Sie werden von einem auf \mathcal{K} beweglichen Punkt P aus auf die Gerade g projiziert: E', F' .

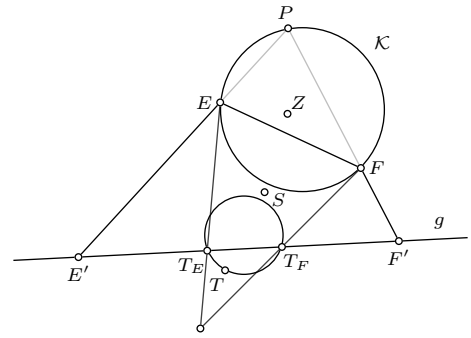


Fig. 15

Wie verhält sich der Tangentialpunkt T des Vierecks $EFE'F'$, wenn P sich bewegt?

Er beschreibt einen Kreis.

Dieser Kreis geht durch die Tangentendrittpunkte T_E, T_F von E und F , sein Mittelpunkt liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke EF und auf dem Umkreis des Dreiecks, welches gebildet wird durch T_E, T_F und den Schnittpunkt $ET_E \cap FT_F$.

Andere merkwürdige Punkte des Vierecks $EFE'F'$?

Auch das Gleichseitiumhyperbelzentrum Z macht einen Kreis, und der Schwerpunkt S bewegt sich auf der Mittelparallelen zwischen g und dem Mittelpunkt der Strecke EF .

Nun zum allgemeinen Fall.

Bei einer allgemeinen \mathcal{C}_3 , schon bei einer allgemeinen \mathcal{Z}_3 bewegen sich T, Z und S auf höheren Kurven. Doch es gibt eine Ausnahme:

Wenn bei einer \mathcal{Z}_3 die Punkte E, F korrespondierend sind, also denselben Tangentendrittpunkt haben, dann beschreibt T einen Kreis, den Kreis durch E, F und diesen Tangentendrittpunkt (den sog. Korrespondenzkreis von E und F).

Schliesslich sollte man noch, wenn schon eingangs $\mathcal{K} \cup g$ als Zirkularkurve betrachtet wird, dort den Punkt P auch auf g laufen lassen oder einen der Punkte E, F oder beide auf g plazieren.

Das ändert einiges.

4

Ein Geradenpaar $g_1 g_2$, das einen vorgegebenen Winkel φ einschliesst und das sich in einem Punkt P einer \mathcal{C}_3 kreuzt (Fig. 16), wird um diesen Punkt P herumgedreht.

Es sei T der Tangentialpunkt des Vierecks, gebildet durch die Schnittpunkte Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 des Geradenpaars mit \mathcal{C}_3 (nebst P). Welchen Weg nimmt T bei der Drehung?

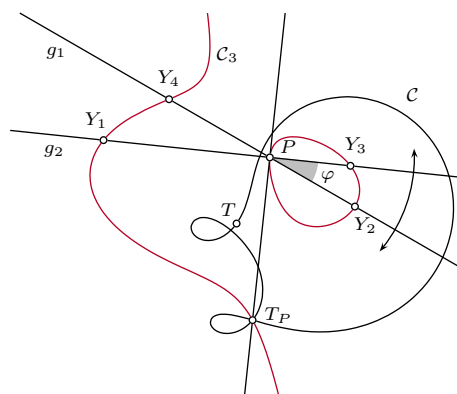


Fig. 16

Die Figur zeigt eine recht komplizierte Kurve \mathcal{C} .

Sofort fällt auf, dass der Tangentendrittpunkt T_P von P eine besondere Rolle spielt.

Mehr zu sagen ist schwierig. Man wird sich zuerst mit speziellen Fällen befassen (ausgeartete \mathcal{C}_3 , günstiger Winkel φ), um mehr herauszufinden.

(a) Zuerst der Fall $\mathcal{C}_3 = \mathcal{K} \cup g$, Kreis \mathcal{K} und Gerade g , eine ausgeartete \mathcal{Z}_3 , und P auf dem Kreis \mathcal{K} (Fig. 17).

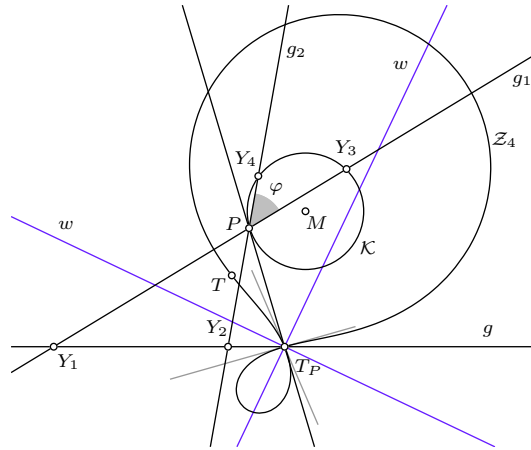


Fig. 17

Das schöne Resultat:

- 1) \mathcal{C} ist hier eine Zirkularkurve 4^{ter} Ordnung \mathcal{Z}_4 mit dem Doppelpunkt T_P .
- 2) Die Winkelhalbierenden w der beiden Tangenten von \mathcal{Z}_4 im Doppelpunkt T_P sind unabhängig vom Winkel φ .
- 3) Der Winkel zwischen den Tangenten in T_P ist gleich 2φ .

Gilt das auch bei einer nichtausgearteten \mathcal{Z}_3 ?

Jawohl, 1),2) und 3) gelten bei jeder \mathcal{Z}_3 , nicht aber bei jeder \mathcal{C}_3 .

(Ein Ausnahmefall liegt dann aber noch vor, wenn P gerade ein In/Ankreismittelpunkt des Steinerdreiecks von \mathcal{Z}_3 ist).

Die Winkelhalbierenden w im Punkt T_P werden bei einer \mathcal{Z}_3 so konstruiert:

Man spiegelt den singulären Brennpunkt Q (bei der Fig. 17 ist es der Kreismittelpunkt M) an der Geraden PT_P und zieht durch den Spiegelpunkt die Gerade ℓ , parallel zur reellen Asymptote. Eine der beiden Geraden w ist die zweite Tangente (nebst T_PP) vom Punkt T_P aus an die Parabel, mit dem Brennpunkt Q und der Leitgeraden ℓ .

Wichtige Entdeckung: Die Kurve \mathcal{Z}_4 von T sollte unbedingt noch an einem Kreis um ihren Doppelpunkt T_P invertiert werden:

Sie geht bei jeder \mathcal{Z}_3 über in eine Hyperbel!

Dies ist der Schlüssel zur Berechnung, von da her kommen die Sätze 1),2) und 3).

Wenn in der Fig. 17 der Punkt P nicht auf \mathcal{K} , sondern auf g gewählt wird, fällt T natürlich mit M ausammen.

(b) Ein nichtzirkularer Fall: $\mathcal{C}_3 = \mathcal{K} \cup g$, Kegelschnitt \mathcal{K} und Gerade g . P auf g (Fig. 18).

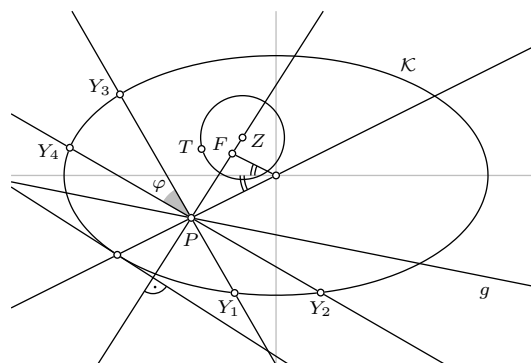


Fig. 18

Auch hier bewegt T sich auf einem Kreis, auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt Z auf der Geraden durch P und den FRÉGIER-Punkt F von P bez. \mathcal{K} liegt.

(c) Welche Bedeutung hat der Winkel φ zwischen g_1 und g_2 ?

Interessant ist der Fall $\varphi = 90^\circ$, dann bewegt sich T bei jeder \mathcal{C}_3 auf einer Geraden (Fig. 19).

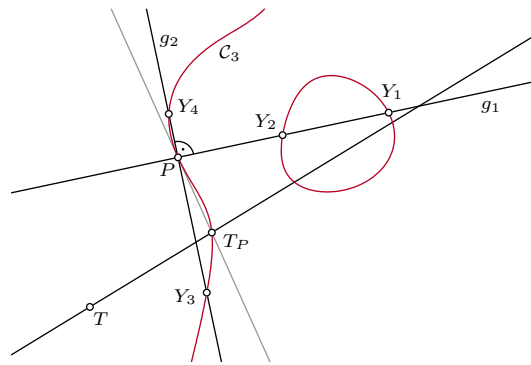


Fig. 19

Bei einer \mathcal{Z}_3 ist diese Gerade eine der beiden oben erwähnten Winkelhalbierenden w beim Doppelpunkt T_P .

Bei einer nichtausgearteten \mathcal{Z}_3 kann sie auch so erklärt werden: Es ist die Gerade durch T_P und den Umkreismittelpunkt des Dreiecks, welches von den drei zu P korrespondierenden Punkten gebildet wird.

Bei einer \mathcal{Z}_3 beschreiben, im Fall $\varphi = 90^\circ$, auch andere merkwürdige Punkte des Vierecks $Y_1Y_2Y_3Y_4$ sehenswerte Kurven.

— Der Schwerpunkt von $Y_1Y_2Y_3Y_4$ bewegt sich auf der Parallelen zur Asymptote durch den Umkreismittelpunkt des Steinerdreiecks.

— Der Q -Punkt des Vierecks $Y_1Y_2Y_3Y_4$ (das ist der singuläre Brennpunkt derjenigen Zirkularkurve, welche $Y_1Y_2Y_3Y_4(T)$ als T -Viereck besitzt – die jetzt aber nicht mit der \mathcal{Z}_3 , von der die Rede ist, verwechselt werden darf) bewegt sich auf einem Kreis, der orthogonal zum Umkreis des Steinerdreiecks ist und der durch P und den zu P isogonalkonjugierten Punkt bez. des Steinerdreiecks geht.

5

Ein Kegelschnittproblem.

Gegeben sind eine Ellipse \mathcal{E} und ein Punkt P im Innern. Durch P werden drei Geraden g_1, g_2, g_3 gelegt, die ein regelmässiges Büschel bilden, 60° von Gerade zu Gerade einschliessend (Fig. 20).

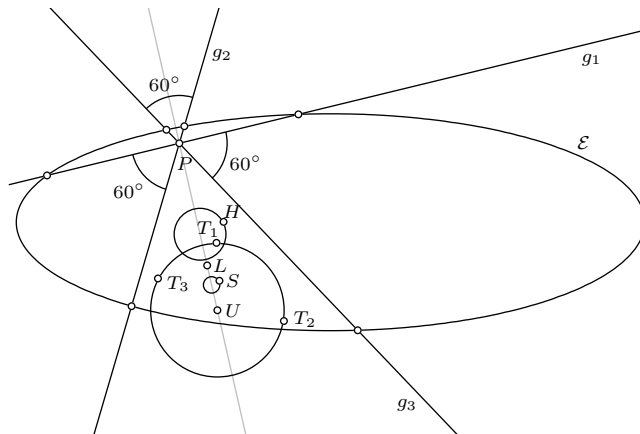


Fig. 20

Es sei T_1 der Tangentialpunkt des Vierecks, gebildet durch die Schnittpunkte des Geradenpaares g_2g_3 mit \mathcal{E} . Entsprechend T_2, T_3 .

Wir interessieren uns für das Dreieck $T_1T_2T_3$.

Das Büschel wird um P herumgedreht. Die Punkte T_1, T_2, T_3 bewegen sich dabei auf dem in 4(b) beschriebenen Kreis für $\varphi = 60^\circ$.

Der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks $T_1T_2T_3$ sitzt also fest.

Wie verhalten sich die anderen merkwürdigen Punkte des Dreiecks?

Der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $T_1T_2T_3$ bewegen sich auf Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Geraden UP liegen.

Und, Überraschung, der Lemoinepunkt L des Dreiecks $T_1T_2T_3$ bewegt sich auch nicht. Er liegt auf UP . Ferner kommt noch dazu, dass der BROCCARD-Winkel des Dreiecks $T_1T_2T_3$ sich bei der Drehung des Büschels nicht verändert.

Eigentlich ist in der Fig. 20 eine (ausgeartete) \mathcal{C}_3 dargestellt, man kann sich ja noch irgend eine Gerade, durch P gelegt, dazudenken.

Die Idee, das drehende Dreigeradenbüschel auch bei einer nichtausgearteten \mathcal{C}_3 auszuprobieren, liegt nahe (Fig. 21).

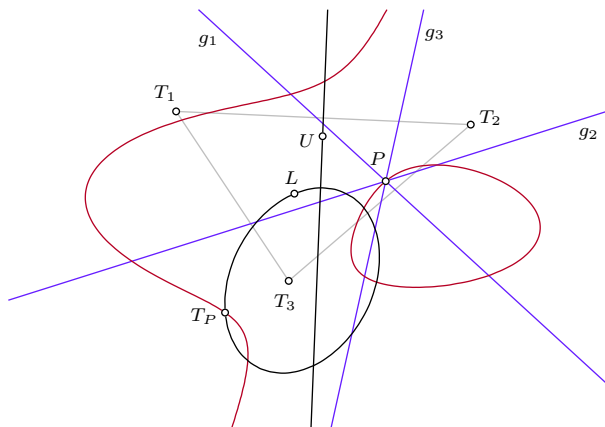


Fig. 21

Erstaunliches Resultat:

Bei einer Drehung des regelmässigen Dreigeradenbüschels $g_1g_2g_3$ um den Büschelpunkt P auf \mathcal{C}_3

— bewegt sich der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks $T_1T_2T_3$ auf einer Geraden,

— bewegt sich der Lemoinepunkt L des Dreiecks $T_1T_2T_3$ auf einer Ellipse, die durch den Tangentendrittpunkt T_P von P geht.

Andere merkwürdige Punkte des Dreiecks verhalten sich nicht so einfach.

Bei einer \mathcal{Z}_3 ist die Situation spezieller:

Die Gerade des Umkreismittelpunkts U ist eine der in 4(a) erwähnten Winkelhalbierenden w der Doppeltangenten von \mathcal{C} (diejenige, welche die Parabel nicht berührt).

Und die Ellipse des Lemoinepunkts L fällt zu einer Doppelstrecke zusammen, auf der Geraden von U liegend.

Man betrachte nun aber bei einer \mathcal{Z}_3 noch die in 4(a) erwähnte Hyperbel, in welche die Kurve \mathcal{C} der Tangentialpunkte T_1, T_2, T_3 bei der Inversion an einem Kreis um den Tangentendrittpunkt T_P von P übergeht (Fig. 22).

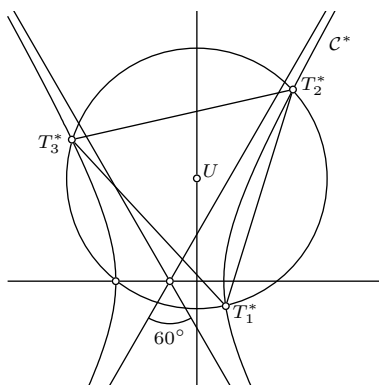


Fig. 22

Diese Hyperbel \mathcal{C}^* hat den Asymptotenwinkel 60° (gleich dem Winkel zwischen den Doppeltangenten von \mathcal{C} in T_P).

Die zu T_1, T_2, T_3 inversen Punkte T_1^*, T_2^*, T_3^* sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks! Das verblüfft.

Der Umkreis dieses gleichseitigen Dreiecks $T_1^*T_2^*T_3^*$ geht durch einen der Hyperbelscheitel, der Mittelpunkt liegt auf der Mittelsenkrechten zwischen dem Hyperbelzentrum und dem anderen Scheitel (es ist die vorhin erwähnte Gerade von U und L), und das heisst dann – weil der Asymptotenwinkel 60° beträgt –, dass auch der Hyperbelbrennpunkt der anderen Seite auf dem Umkreis liegt.

Hier mag die Frage auftauchen, wo alle einem Kegelschnitt eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke ihren Mittelpunkt haben und wie man bei gegebenem Mittelpunkt den Dreiecks-umkreis konstruiert.

Nun noch die Idee, auch bei der Fig. 20 die Punkte T_1, T_2, T_3 an irgend einem Kreis zu invertieren: T_1^*, T_2^*, T_3^* und dann das Dreieck $T_1^*T_2^*T_3^*$ zu untersuchen.

Es ist wieder der Lemoinepunkt, der Aufsehen erregt:

Der Lemoinepunkt auch des Dreiecks $T_1^*T_2^*T_3^*$ bleibt bei der Drehung des $g_1g_2g_3$ -Büschels um P unbeweglich stehen.

6

Zum Schluss eine \mathcal{C}_3 mit Doppelpunkt.

Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein Kegelschnitt \mathcal{K} , der durch die Ecke A geht und die Gerade BC in zwei Punkten, verschieden von B und C , schneidet.

Das Bild \mathcal{K}' von \mathcal{K} bei der Isogonalabbildung im Dreieck ABC ist eine Kurve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt A (Fig. 23). (Kegelschnitte, die durch alle drei Ecken gehen, werden in Geraden abgebildet, Kegelschnitte durch genau zwei der Ecken in Kegelschnitte).

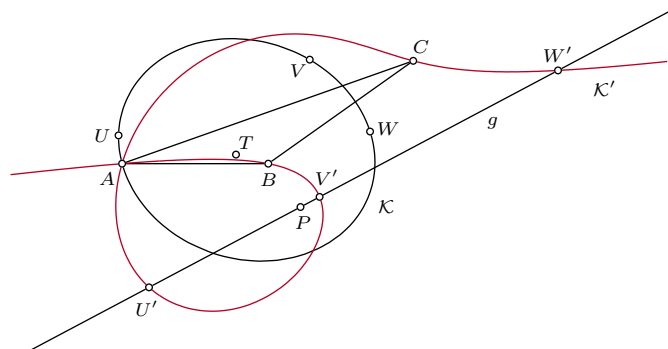


Fig. 23

Nun ist noch ein Punkt P fest vorgegeben, und durch P wird eine Gerade g gelegt.

Die drei Schnittpunkte von g mit \mathcal{K}' seien mit U', V', W' bezeichnet. Wie konstruiert man sie? Kein Problem, man konstruiert einfach zuerst U, V, W , indem man die Gerade isogonal abbildet und ihr Bild mit \mathcal{K} schneidet. *Cabri* kann das, zwei Kegelschnitte schneiden, und liefert neben U, V, W auch A dazu (als Bild des Schnittpunkts von g mit der Geraden BC).

Was lässt sich über das Dreieck UVW sagen?

Man muss das Viereck $AUVW$ betrachten. Uns interessiert sein Tangentialpunkt.

Satz: Wenn die Gerade g um den Punkt P herumgedreht wird, bewegt sich der Tangentialpunkt T des Vierecks $AUVW$ auf einem Kreis.

Wie gross dieser Kreis k_P ist, wo er liegt und ob T ihn ganz (sichtbar) beschreibt, hängt von der Position des Punktes P ab.

Zwei Fragen:

— Gibt es einen Punkt P , dessen Kreis k_P zu einem Punkt zusammenfällt? Es kann nur einen einzigen solchen Nullkreis geben.

— Wie wandert der Mittelpunkt M_P des Kreises k_P , wenn P sich auf einer Geraden bewegt oder gar auf einem Kegelschnitt?

Und schliesslich sollten vielleicht auch noch andere Punkte des Vierecks $AUVW$ betrachtet werden: der Schwerpunkt, das Gleichseitumhyperbelzentrum...

Literatur

- [1] Stärk Roland/Baumgartner Daniel: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks.
Praxis der Mathematik, PM44 (2002) 19-27. Aulis Verlag, Köln.
- [2] Laborde J.- M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
- [3] Stärk R.: Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. www.geometria.ch
- [4] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer.

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH-8234 Stetten
roland.staerk@sunrise.ch