

# AFFINE VIERECKE

Roland Stärk, 2016

Publiziert auf [www.geometria.ch](http://www.geometria.ch)

Bei einem Viereck von "Inhalt" sprechen, ist problematisch, wenn ein "Allgemeines Viereck", nicht nur ein "konvexer geschlossener Vierstreckenzug" gemeint ist.

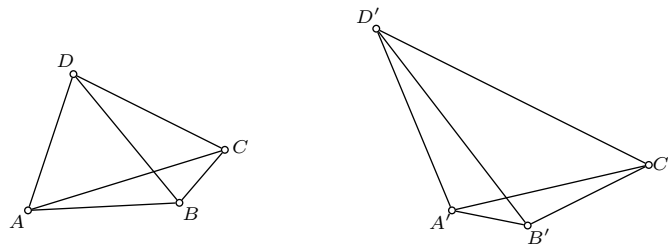


Fig. 1

**Definition.** Zwei Vierecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  heissen inhaltsproportional, wenn die (orientierten) Inhalte ihrer Teildreiecke proportional sind, wenn

$$\frac{J_{A'B'C'}}{J_{ABC}} = \frac{J_{B'C'D'}}{J_{BCD}} = \frac{J_{C'D'A'}}{J_{CDA}} = \frac{J_{D'A'B'}}{J_{DAB}} \text{ ist.}$$

Das Verhältnis kann  $+/- 1$  sein, dann sagt man gleich-/gegensinnig *inhaltsgleich*.

Zum Beispiel ist ein Viereck inhaltsproportional zu seinem Mittelsenkrechtenviereck [4].

Ähnliche Vierecke sind inhaltsproportional, das ist klar.

Die Vierecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  in der Fig. 1 sind offensichtlich nicht inhaltsproportional. Wie müsste die Ecke  $D'$  umplatziert werden, um Proportionalität zu erreichen?

Bei zwei inhaltsproportionalen Vierecken können sieben der acht Eckpunkte beliebig vorgegeben werden. Die achte ist durch sie eindeutig bestimmt. Dies zeigt eine kurze Rechnung (wir verwenden *Mathematica* [1]): Beim Viereck  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 0, 1)$ ,  $C(c_1, c_2, 1)$ ,  $D(d_1, d_1, 1)$  und dem Dreieck  $A'(x_1, y_1, 1)$ ,  $B'(x_2, y_2, 1)$ ,  $C'(x_3, y_3, 1)$  (homogene Cartesische Koordinaten) ergibt sich:

$$D'(c_2 x_1 - c_2 d_1 x_1 - d_2 x_1 + c_1 d_2 x_1 + c_2 d_1 x_2 - c_1 d_2 x_2 + d_2 x_3, \\ c_2 y_1 - c_2 d_1 y_1 - d_2 y_1 + c_1 d_2 y_1 + c_2 d_1 y_2 - c_1 d_2 y_2 + d_2 y_3, c_2).$$

Bekanntlich verändern sich bei *affinen Abbildungen* Dreiecksinhalte mit konstantem Verhältnis.

Eine "affine" Abbildung der Ebene ist eine projektive Abbildung, welche die folgenden drei äquivalenten Eigenschaften besitzt.

- (1) Parallele Geraden werden in parallele Geraden abgebildet, d.h. Fernpunkte gehen über in Fernpunkte.
- (2) Teilverhältnisse kollinearer Punktetripel bleiben erhalten.
- (3) Dreiecksinhalte verändern sich mit konstantem Verhältnis.

Anderes geht verloren oder kann verloren gehen. So ist z.B. bei der affinen Abbildung, welche ein Dreieck  $ABC$  in ein Dreieck  $A'B'C'$  überführt, der Bildpunkt  $U'$  des Umkreismittelpunkts  $U$  von  $ABC$  natürlich nicht automatisch wieder der Umkreismittelpunkt, sondern lediglich der zum Umkreismittelpunkt von  $ABC$  affine Punkt von  $A'B'C'$ .

Es gilt der

**Satz:** Zu zwei inhaltsproportionalen Vierecken gibt es immer eine affine Abbildung der ganzen Ebene, die das eine in das andere überführt.

Oben bildet die Abbildung mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & \frac{-x_1 + c_1 x_1 - c_1 x_2 + x_3}{c_2} & x_1 \\ -y_1 + y_2 & \frac{-y_1 + c_1 y_1 - c_1 y_2 + y_3}{c_2} & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

das Viereck  $ABCD$  in das Viereck  $A'B'C'D'$  ab, wie mit der angefangenen Rechnung weiter gezeigt werden kann.

Statt "inhaltsproportional" kann darum "affin" gesagt werden. Wir bleiben aber beim anschaulichen Wort, weil meistens zuerst auf das Inhaltskriterium geachtet wird, wenn Ausschau gehalten wird nach affinen Vierecken.

Zur Konstruktion des Punktes  $D'$  bietet sich die Teilverhältnis-Eigenschaft an (Fig. 2): Man bildet einen Diagonalepunkt, z.B.  $G = AB \cap CD$  ab:  $TV(A'B'G') = TV(ABG)$  und kommt dann mit dem Verhältnis  $TV(GCD)$  zum Punkt  $D'$ . (Mit  $TV(XYZ)$  ist  $\frac{XZ}{YZ} = TV(XYZ) \cdot \overline{YZ}$  gemeint).

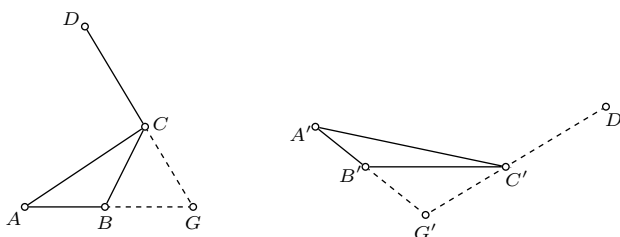


Fig. 2

So kann mit *Cabri* [2] leicht eine Prozedur gemacht werden, die, bezugnehmend auf ein erstes Dreieck  $ABC$  und dessen Bild, jedem Punkt seinen affinen zuordnet.

1) Zu zwei inhaltsproportionalen Vierecken können "Zwischenvierecke" konstruiert werden, die zu beiden auch inhaltsproportional sind:

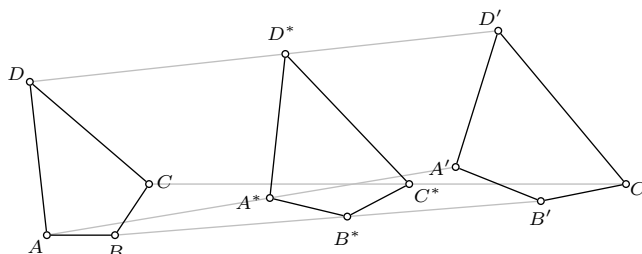


Fig. 3

In der Fig. 3 sind die Vierecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  inhaltsproportional. Die Strecken  $AA', BB', CC', DD'$  werden alle im gleichen Verhältnis geteilt.:  $A^*, B^*, C^*, D^*$  ( $TV(XX'X^*) = k$ ).

Das Viereck  $A^*B^*C^*D^*$  ist inhaltsproportional zu  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$ .

Das Inhaltsverhältnis  $v^* = \frac{J_{A^*B^*C^*}}{J_{ABC}}$  hängt aber nicht etwa nur vom Verhältnis  $v' = \frac{J_{A'B'C'}}{J_{ABC}}$  und von  $k$  ab, sondern auch von der Matrix der affinen Abbildung:  $ABC \mapsto A'B'C'$ .

(Es gilt  $v^* = \frac{1-(p+q)k+v'k^2}{(k-1)^2}$ , wenn die Matrix die Form  $\begin{bmatrix} p & \cdots & \cdots \\ \cdots & q & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  hat.)

Speziell noch: Wenn die Vierecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  gleichsinnig(!) ähnlich sind, ist auch  $A^*B^*C^*D^*$  ihnen beiden ähnlich.

2) Ein weiterer bemerkenswerter Zusammenhang:

Bei einem Viereck  $ABCD$  seien mit  $Pot_A, Pot_B, Pot_C, Pot_D$  die Potenzen der Ecken  $A, B, C, D$  bezüglich der Umkreise der jeweils durch die drei anderen Ecken gebildeten Dreiecke bezeichnet (Die Potenz eines Punktes  $P$  bezüglich eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$  ist  $\overline{PM}^2 - r^2$ ). Es gilt der Satz

Zwei Vierecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  sind genau dann inhaltsproportional, wenn bei ihnen diese Potenzen proportional sind, wenn

$$Pot_A : Pot_B : Pot_C : Pot_D = Pot_{A'} : Pot_{B'} : Pot_{C'} : Pot_{D'}$$

ist.

Man beweist dies analytisch: Zuerst, dass  $\frac{Pot_A}{Pot_B} = -\frac{J_{CDA}}{J_{BCD}}$  ist. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \text{aus } \frac{Pot_A}{Pot_B} &= \frac{Pot_{A'}}{Pot_{B'}} \\ -\frac{J_{CDA}}{J_{BCD}} &= -\frac{J_{C'D'A'}}{J_{B'C'D'}} \\ \frac{J_{CDA}}{J_{C'D'A'}} &= \frac{J_{BCD}}{J_{B'C'D'}} \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

3) Eine besondere Rolle spielen immer Kreisvierecke (Vierecke mit Umkreis).

Zwei Kreisvierecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  sind genau dann inhaltsproportional, wenn die drei Gegenseitenverhältnisse des einen gleich gross sind wie die entsprechenden Verhältnisse des anderen:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'D'}}, \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'C'}}$$

Aus (Fig. 4)  $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$  und  $\frac{e}{f} = \frac{e'}{f'}$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{ae}{cf} &= \frac{a'e'}{c'f'} \\ \frac{ae}{a'e'} &= \frac{cf}{c'f'} \\ \frac{ae \sin \varphi}{a'e' \sin \varphi} &= \frac{cf \sin \varphi}{c'f' \sin \varphi} \\ \frac{J_{ABC}}{J_{A'B'C'}} &= \frac{J_{BCD}}{J_{B'C'D'}} \text{ , usw.} \end{aligned}$$

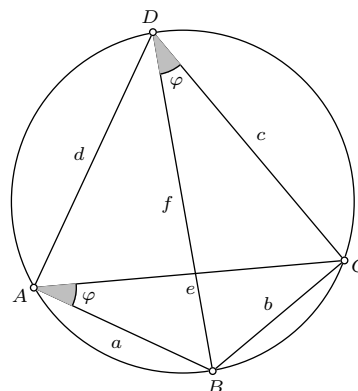


Fig. 4

Es folgen nun verschiedene geometrische Probleme, bei denen es um affine Vierecke geht.

## 1

Das Mittelsenkrechtenviereck eines Vierecks.

Bei einem Viereck  $ABCD$  seien  $U_A, U_B, U_C, U_D$  die Umkreismittelpunkte der Teildreiecke  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Das Viereck  $U_A U_B U_C U_D$  heisst Mittelsenkrechtenviereck von  $ABCD$  (seine Seiten sind dessen Mittelsenkrechten).

$ABCD$  und  $U_A U_B U_C U_D$  sind inhaltsproportional.

Das Affinitätsverhältnis  $\frac{J_{U_A U_B U_C U_D}}{J_{ABC}}$  ist die in [4] mit  $\sigma_{ABCD}$  bezeichnete charakteristische Zahl des Vierecks.

Hier wollen wir mit  $A(a, \frac{1}{a}, 1), B(b, \frac{1}{b}, 1), \dots$  die Asymptoten der Gleichseitumhyperbel des Vierecks  $ABCD$  als Koordinatenkreuz benutzen. Für Vierecksberechnungen ist dies die beste Methode, weil alle vier Ecken zum Einsatz kommen und Neues jeweils mit schon Untersuchttem leicht in Verbindung gebracht

werden kann. (Vierecke, die genau ein orthogonales Gegenseitenpaar haben, werden so nicht erfasst, können aber, wenn nötig, als Grenzfall betrachtet werden).

$U_A$  hat die Koordinaten  $(1 + b^2cd + bc^2d + bcd^2, bc + bd + cd + b^2c^2d^2, 2bcd)$ , und  $-\frac{(-1+abcd)^2}{4abcd}$  ist die mit  $\sigma_{ABCD}$  bezeichnete Zahl.

Die affine Abbildung, welche  $ABCD$  in  $U_AU_BU_CU_D$  überführt, hat die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 - abcd & 0 & abcd(a + b + c + d) \\ 0 & abcd(-1 + abcd) & abc + abd + acd + bcd \\ 0 & 0 & 2abcd \end{bmatrix}$$

- Sie bildet die Gleichseitumhyperbel von  $ABCD$  in die Gleichseitumhyperbel von  $U_AU_BU_CU_D$  ab.
- Kreise werden in Ellipsen abgebildet, mit den Achsen parallel zu den Asymptoten der Gleichseitumhyperbel von  $ABCD$ , und mit dem Achsenverhältnis  $\frac{1}{abcd}$ .
- Sie hat einen Fixpunkt  $F$ , dieser teilt die Strecke  $ST$  ( $S$  der Schwerpunkt,  $T$  der Tangentialpunkt [3] von  $ABCD$ ) im Verhältnis  $\frac{\sigma-1}{4\sigma}$ .

Nun nehme man auch noch die Höhenschnittpunkte  $H_A, H_B, \dots$  der Teildreiecke  $BCD, CDA, \dots$  hinzu.  $H_A(-\frac{1}{bcd}, -bcd, 1)$ .

Das Viereck  $H_AH_BH_CH_D$  ist auch inhaltsproportional zu  $ABCD$ , sogar inhaltsgleich:  $\frac{J_{H_AH_BH_CH_D}}{J_{ABCD}} = 1$ , somit auch inhaltsproportional zu  $U_AU_BU_CU_D$ .

Wenn nun mit dem in Fig. 3 beschriebenen Verfahren zwischen  $U_AU_BU_CU_D$  und  $H_AH_BH_CH_D$  Zwischenvierecke  $A^*B^*C^*D^*$  konstruiert werden, dann erhält man eine Vielzahl von zu  $ABCD$  inhaltsproportionalen Vierecken.

Interessant ist die Frage, auf welcher Kurve der Tangentialpunkt von  $A^*B^*C^*D^*$  sich bewegt, wenn  $A^*B^*C^*D^*$  variiert.

## 2

Gegeben sind zwei parallele Geraden  $f, g$  und zwei Punkte  $A, B$  (Fig. 5).

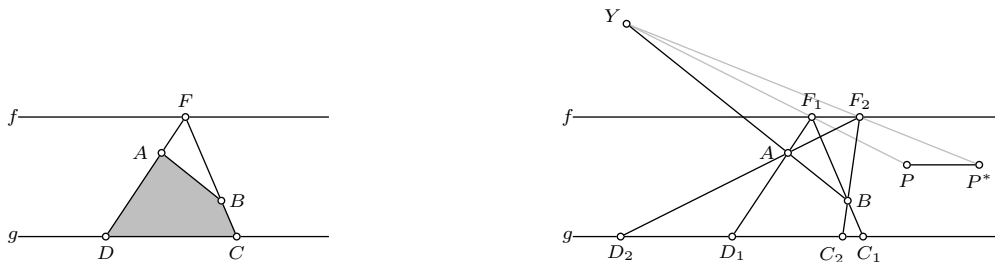


Fig. 5

Von einem Punkt  $F$  auf  $f$  werden die Punkte  $A$  und  $B$  auf die Gerade  $g$  projiziert. Es seien  $D$  und  $C$  die Bilder.  $F$  wird auf  $f$  bewegt,  $A$  und  $B$  werden festgehalten. Das Viereck  $ABCD$  verändert laufend seine Form.

*Alle so entstehenden Vierecke  $ABCD$  sind inhaltsproportional.*

Man greife zwei Vierecke heraus:  $ABC_1D_1, ABC_2D_2$ . Analytisch kann leicht nachgewiesen werden, dass sie das Inhaltskriterium erfüllen.

Was lässt sich über die affine Abbildung der Ebene sagen, welche  $ABC_1D_1$  in  $ABC_2D_2$  überführt? Wie kommt das Bild  $P^*$  eines Punktes  $P$  zustande?

$A$  und  $B$  sind Fixpunkte dieser Abbildung, die Gerade  $AB$  ist punktweise fix. Der Diagonalschnittpunkt  $F_1$  von  $ABC_1D_1$  geht über in den Diagonalschnittpunkt  $F_2$  von  $ABC_2D_2$ . Die Gerade  $PF_1$  wird in die Gerade durch  $F_2$  abgebildet, welche die Achse  $AB$  im selben Punkt  $Y$  schneidet, wie sie, und das Verhältnis  $TV(PF_1Y)$  bleibt erhalten. Das bedeutet:  $P^*$  ist der Schnittpunkt von  $YF_2$  mit der Parallelen zu  $f$  durch  $P$ .

Bei der affinen Abbildung:  $ABC_1D_1 \mapsto ABC_2D_2$  handelt es sich somit um eine Zentralkollineation mit dem Fernpunkt von  $f, g$  als Zentrum und der Geraden  $AB$  als Achse, welche  $F_1$  in  $F_2$  abbildet. Es ist eine "schiefe Affinität" in der Sprache der Darstellenden Geometrie.

Wie verhält sich der Tangentialpunkt  $T$  des Vierecks  $ABCD$  bei der Bewegung von  $F$ ? (Fig. 6).

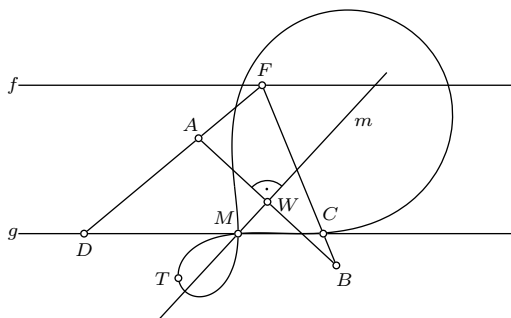


Fig. 6

$T$  beschreibt eine Kurve 4<sup>ter</sup> Ordnung, die symmetrisch ist bez. der Mittelsenkrechten  $m$  von  $AB$ . Bei der Inversion an einem Kreis um den Schnittpunkt  $M$  von  $m$  mit  $g$  geht diese Kurve 4<sup>ter</sup> Ordnung über in einen Kegelschnitt.

Und was machen andere merkwürdige Punkte von  $ABCD$ ?

- Der Schwerpunkt von  $ABCD$  bewegt sich auf der Mittelparallel zwischen der Mitte  $W$  von  $AB$  und  $g$ .
- Das Gleichseitumhyperbelzentrum  $Z$  von  $ABCD$  beschreibt eine Kurve, die überraschend der Kurve von  $T$  ähnlich zu sein scheint, symmetrisch bez. der Senkrechten  $h$  zu  $g$  durch  $W$ .

Die Ähnlichkeit stimmt. Das ergibt sich aus (Fig. 7):

$$\angle TMW = \angle GWZ, \quad \frac{TM}{ZW} = \text{konstant},$$

$$\triangle TMW \sim (\text{gegenseitig}) \triangle ZWG.$$

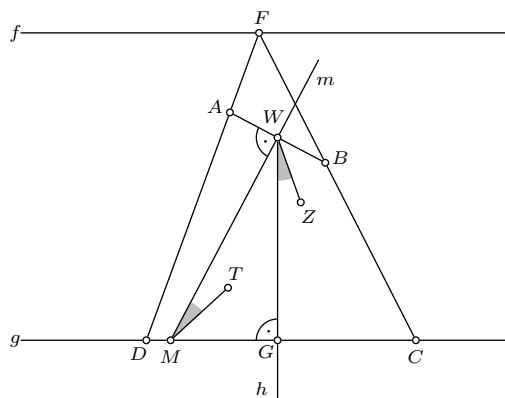


Fig. 7

### 3

Bei der folgenden Dreiecksberechnung werden baryzentrische Koordinaten verwendet. Dies bringt den Vorteil, dass Merkwürdige Dreieckspunkte jeweils an ihren Koordinaten erkannt werden können.

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ , mit den Seitenlängen  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ .

Ein Punkt  $P(u, v, w)$  wird isogonal abgebildet in den Punkt  $P'(\frac{a^2}{u}, \frac{b^2}{v}, \frac{c^2}{w})$ , und von  $P'$  aus werden die Lote auf die Dreiecksseiten gefällt. Es sei  $A'$  der Fusspunkt auf  $BC$ ,  $B'$  auf  $CA$ ,  $C'$  auf  $AB$  (Fig. 8).

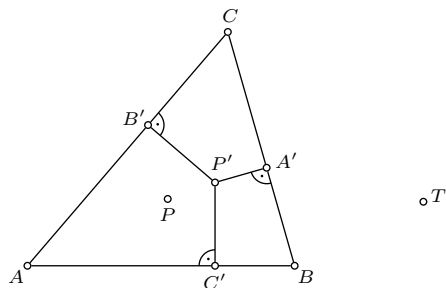


Fig. 8

Die Vierecke  $PABC$  und  $P'A'B'C'$  sind inhaltsproportional.

$$\text{Das Affinitätsverhältnis } \lambda = \frac{J_{P'A'B'C'}}{J_{PAB}} = \frac{J_{A'B'C'}}{J_{ABC}} = \dots \text{ ist } \frac{uvw(u+v+w)}{(a^2vw + b^2wu + c^2uv)^2} \cdot 4J_{ABC}^2.$$

Die Tabelle zeigt, wie einige merkwürdige Punkte in Erscheinung treten:

	$P$	$P'$	$\lambda$	$Fix$
$S$ Schwerpunkt	$S$	$L$	$\frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \omega$	
$I$ Inkreismittelpunkt	$I$	$I$	$\frac{\rho}{2r}$	$I$
$U$ Umkreismittelpunkt	$U$	$H$	$\frac{J \operatorname{ctg}(\alpha) \operatorname{ctg}(\beta) \operatorname{ctg}(\gamma)}{r^2}$	$L$
$H$ Höhenschnittpunkt	$H$	$U$	$\frac{1}{4}$	$S$
$L$ Lemoinepunkt	$L$	$S$	$\frac{J \operatorname{ctg}(\omega)}{9r^2}$	
$dL$ deLongchampppunkt	$dL$			$H$

$\omega$  Broccardwinkel  
 $\rho$  Inkreisradius  
 $r$  Umkreisradius  
 $J$  Inhalt von  $\triangle ABC$   
 $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle CBA, \gamma = \angle ACB$

$Fix$  ist der Fixpunkt der affinen Abbildung:  $PABC \mapsto P'A'B'C'$ ; manchmal ist auch er ein Besonderer. Eine Bemerkung zum Fall  $D = S, D' = L$ : Die Affinität der Vierecke  $SABC, LA'B'C'$  zeigt mit der Proportion  $1 : 1 : 1 : 3 = J_{LA'B'} : J_{LB'C'} : J_{LC'A'} : J_{A'B'C'}$ , dass der Lemoinepunkt des Dreiecks  $ABC$  in seinem Fusspunktdreieck die Rolle des Schwerpunkts spielt, denn der Schwerpunkt hat in jedem Dreieck die Koordinaten  $(1, 1, 1)$ .

Wie sich diese schönen Dinge immer weiter entwickeln, und wie manchmal unverhofft Neues zum schon Bekannten bereichernd hinzukommt, soll an einem Beispiel gezeigt werden.

In der Fig. 8 ist vorsorglich schon der Tangentialpunkt  $T$  des Vierecks  $P'A'B'C'$  eingezeichnet. Wir taufen um: Statt  $P$  schreiben wir  $D$ , und statt  $T$  schreiben wir  $T_D$ . Nun kann doch mit den drei anderen Ecken des Vierecks  $ABCD$  gleich verfahren werden, wie mit  $D$ . Die Ecke  $A$  im Dreieck  $BCD$  isogonal abbilden und über die Lotfusspunkte zum Punkt  $T_A$  gelangen. Dann  $T_B, T_C$ .

Und schon ist mit  $T_A T_B T_C T_D$  (Fig. 9) ein Viereck gewonnen, das – bei unserem Thema – alle Vorzüge besitzt, die ein Viereck haben kann.

- Es ist inhaltsproportional zu  $ABCD$ ,
- es ist gegenwinkelsummengleich dem Viereck  $ABCD$  [5],
- es hat die gleiche  $\sigma$ -Zahl wie  $ABCD$ .

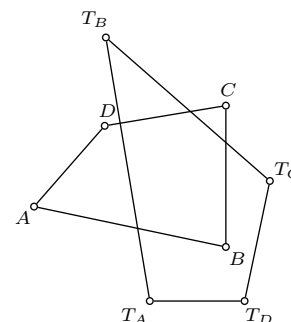


Fig. 9

Das sind Eigenschaften, die alle auch dem Mittelsenkrechtenviereck  $U_A U_B U_C U_D$  von  $ABCD$  zukommen. Ja, das Viereck  $T_A T_B T_C T_D$  ist dem Viereck  $U_A U_B U_C U_D$  sogar ähnlich. Liegt hier eine zentrische Ähnlichkeit vor? Und wie ist das Ähnlichkeitsverhältnis?

In der Fig. 10 werden die Ecken eines Vierecks  $ABCD$  an einem Kreis um den Tangentialpunkt  $T$  von  $ABCD$  invertiert. Was lässt sich über die Bildpunkte  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  sagen?

Die Vierecke  $A^*B^*C^*D^*$  und  $ABCD$

- sind inhaltsproportional,
- sind gegenseitig gegenwinkelsummengleich [5],
- und haben dieselbe  $\sigma$ -Zahl.

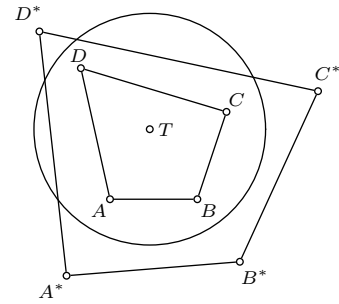


Fig. 10

Mit dem Ansatz  $A(a, \frac{1}{a}, 1)$ ,  $B(b, \frac{1}{b}, 1)$ , ... ergibt sich für das Affinitätsverhältnis ( $r$  der Radius des Inversionskreises)

$$\frac{J_{A^*B^*C^*D^*}}{J_{ABCD}} = \dots = \frac{abcd(1+abcd)^4}{(1+a^2b^2)(1+a^2c^2)(1+b^2c^2)(1+a^2d^2)(1+b^2d^2)(1+c^2d^2)} \cdot r^4,$$

und es zeigt sich, dass die affine Abbildung welche  $ABCD$  in  $A^*B^*C^*D^*$  überführt, die Gleichseitumhyperbel von  $ABCD$  in die Gleichseitumhyperbel von  $A^*B^*C^*D^*$  abbildet. Das heisst, hier haben die Asymptoten der Gleichseitumhyperbel von  $ABCD$  die Richtungen, welche wieder in orthogonale übergehen.

Dieses Problem zeigt einmal mehr die besondere Bedeutung des Tangentialpunktes eines Vierecks – des wichtigsten merkwürdigen Viereckpunktes –, denn wenn man die Inversion an einem anderen Kreis, nicht mit Mittelpunkt  $T$ , vornimmt, ist keine Inhaltsproportionalität und keine  $\sigma$ -Gleichheit festzustellen.

Die gegenseitige Gegenwinkelsummengleichheit besteht mit jedem Kreis.

In der Fig. 11 soll trotzdem noch versucht werden, mit einem Kreis  $k$  um irgend einen Punkt  $M$  (der Radius spielt keine Rolle) etwas für das Viereck  $A^*B^*C^*D^*$  der an  $k$  invertierten Ecken von  $ABCD$  herauszuholen.

Vielleicht kann, analog wie im vorangehenden Kapitel, die Position des Punktes  $M$  bezüglich der Teildreiecke von  $ABCD$  ausgenützt werden. Es sei  $A'$  der zu  $M$  isogonale Punkt im Dreieck  $BCD$ ,  $B'$  der zu  $M$  isogonale beim Dreieck  $CDA$ , ...

Welche Überraschung!

Die Vierecke  $A^*B^*C^*D^*$  und  $A'B'C'D'$

- sind inhaltsproportional,
- sind gegenseitig gegenwinkelsummengleich,
- und haben dieselbe  $\sigma$ -Zahl.

Noch ein Zusatz: Die gemeinsame  $\sigma$ -Zahl der Vierecke  $A^*B^*C^*D^*$  und  $A'B'C'D'$  ist genau dann gerade auch gleich der  $\sigma$ -Zahl des Vierecks  $ABCD$ , wenn der Punkt  $M$  die Eigenschaft hat, dass die Fusspunkte seiner sechs Lote auf die Seiten von  $ABCD$  alle auf einem gemeinsamen Kegelschnitt liegen. Diese Bedingung wird z.B. vom Punkt  $T$  erfüllt.

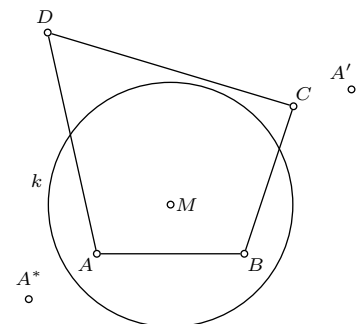


Fig. 11

5

Einem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  ist ein Viereck  $ABCD$  einbeschrieben (Fig. 12). Die Umkreise der Teildreiecke von  $ABCD$  haben mit  $\mathcal{K}$  je noch einen weiteren Punkt gemeinsam. Es sei  $D'$  der vierte Punkt des Umkreises von  $ABC$ . Entsprechend  $A'$  von  $BCD, \dots$

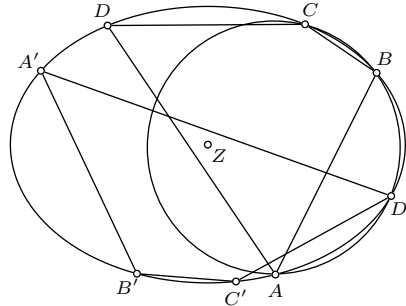


Fig. 12

Die Vierecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  sind inhaltsgleich.

$$J_{A'B'C'} = J_{ABC}, \dots$$

Eine analytische Rechnung mit (homogenen Cartesischen Koordinaten  $t_1, t_2, t_3$ ) kann so beginnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}: & \quad t_1^2 v^2 + t_2^2 u^2 - t_3^2 u^2 v^2 = 0 \\ \text{Punkt auf } \mathcal{K}: & \quad (u(m^2 - v^2), 2mv^2, m^2 + v^2); \text{ Parameter } m \\ \text{usw.} & \end{aligned}$$

Wenn speziell  $\mathcal{K}$  die Gleichseitumhyperbel von  $ABCD$  ist, dann ist  $A'$  diametral zum Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $BCD$ ,

Zeichnet man in der Fig. 12 in den Punkten  $A, A', B, B', \dots$  noch die Tangenten von  $\mathcal{K}$  ein ( $t_X$  Tangente im Punkt  $X$ ), dann stellt man fest, dass entsprechende Tangendreiseite auch inhaltsgleich sind:

$$J_{t_X t_Y t_Z} = J_{t_{X'} t_{Y'} t_{Z'}}, \quad \{X, Y, Z\} \subset \{A, B, C, D\}.$$

Und die Verbindungen  $AA', BB', CC', DD'$  haben auch eine Ordnung: Sie hüllen einen begleitenden Kegelschnitt  $\mathcal{K}^*$  ein (Fig. 13), der aus  $\mathcal{K}$  durch eine Streckung vom Zentrum  $Z$  aus hervorgeht. Berührung in der Seitenmitte.

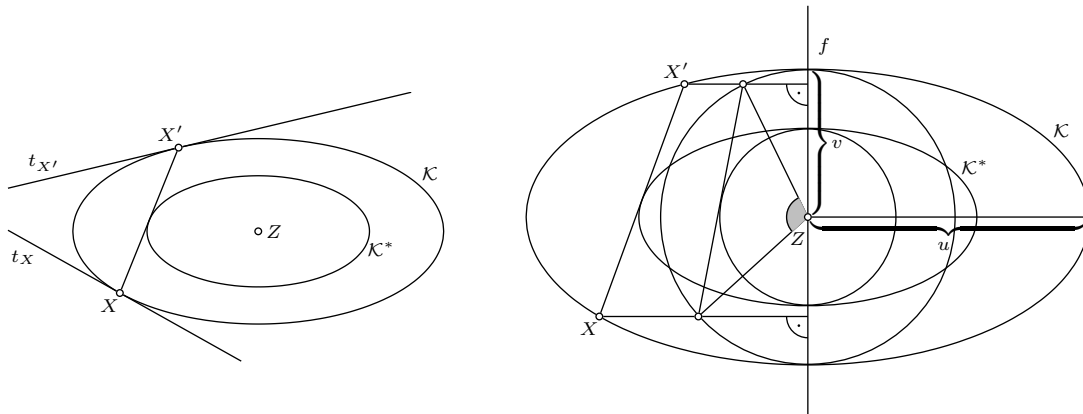


Fig. 13

Es ist so:

Die affine Abbildung der Ebene, welche das Viereck  $ABCD$  in das Viereck  $A'B'C'D'$  überführt, hat den Fixpunkt  $Z$  und sie bildet  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{K}^*$  ab.

Das Bild  $X'$  eines Punktes  $X$  von  $\mathcal{K}$  ist der andere Schnittpunkt der von  $X$  aus an  $\mathcal{K}^*$  gelegten Tangente, (und zwar ist es die Tangente, mit welcher das Dreieck  $XX'Z$  die durch  $AA'Z$  vorgegebene Orientierung hat).



Die Tangente  $t_X$  wird abgebildet in die Tangente  $t_{X'}$ . Darum die oben erwähnte Inhaltsgleichheit der Dreiseite.

Das Bild  $P'$  irgend eines Punktes  $P$  der Ebene kann mit Hilfe der Geraden  $PZ$  und einem ihrer Schnittpunkte mit  $\mathcal{K}$  gezeichnet werden.

Man führe nun in der Fig. 13 noch die Normale Affinität mit der Achse  $f$  von  $\mathcal{K}$  als Affinitätsachse und dem Verhältnis  $\frac{v}{u}$  aus. Die Kegelschnitte  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}^*$  – hier in dieser Zeichnung sind es Ellipsen – gehen hier in Kreise über, und sofort wird ersichtlich, dass die Abbildung:  $P \mapsto P^*$  sich zusammensetzt aus dieser Normalen Affinität, hin und zurück, mit einer Drehung um  $Z$  dazwischen.

## 6

Einem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  ist ein Dreieck  $ABC$  eingeschrieben (Fig. 14).

Von einem Punkt  $P$  auf  $\mathcal{K}$  aus werden die Lote auf die Seiten des Dreiecks  $ABC$  gefällt, und der Umkreis  $k_P$  des Dreiecks der Lotfußpunkte wird konstruiert. Dann wird  $P$  auf  $\mathcal{K}$  bewegt. Was machen die Kreise  $k_P$ ? Auf den ersten Blick ist nichts auffällig.

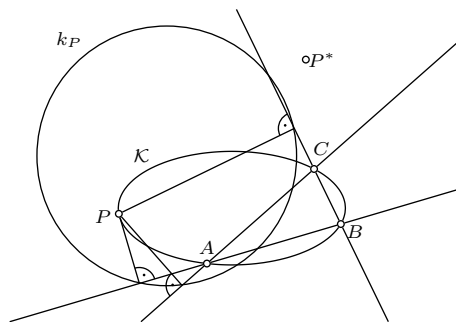


Fig. 14

Hält man einen Kreis fest und bewegt man dazu einen zweiten, so fällt auf, dass sich dabei ihre Potenzgerade um einen fixen Punkt dreht.

*Es gibt somit einen Punkt, der bezüglich aller Kreise  $k_P$  dieselbe Potenz hat.*

Dieses Potenzzentrum der Lotfußpunktkreise aller Punkte von  $\mathcal{K}$  soll hier "Potenzzentrum von  $\mathcal{K}$  bezüglich des eingeschriebenen Dreiecks  $ABC$ " genannt werden.

Gegeben sei nun ein Viereck  $ABCD$ , und  $\mathcal{K}$  sei irgend ein Umkegelschnitt von  $ABCD$ . Bezüglich jedes Teildreiecks von  $ABCD$  hat  $\mathcal{K}$  ein Potenzzentrum. Es sei  $A^*$  dasjenige bezüglich des Dreiecks  $BCD$ , entsprechend  $B^*$  bezüglich  $CDA$ , ... (Fig. 15).

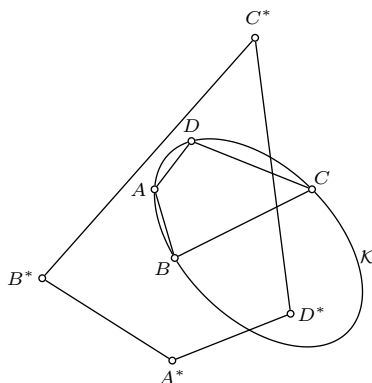


Fig. 15

*Die Vierecke  $ABCD$  und  $A^*B^*C^*D^*$  sind inhaltsproportional.*

Nun soll der Umkegelschnitt  $\mathcal{K}$  von  $ABCD$  noch variiert werden. Das Viereck  $A^*B^*C^*D^*$  führt eine interessante Bewegung durch. Die Ecken  $A^*, B^*, C^*, D^*$  beschreiben lauter ähnliche Ellipsen. Diese laufen durch das Gleichseithyperbelzentrum  $Z$  von  $ABCD$  (Wenn  $\mathcal{K}$  die Gleichseithyperbel ist, fallen  $A^*, B^*, C^*, D^*$  zusammen).

Die Ellipsenachsen sind parallel zu den Asymptoten der Gleichseitumhyperbel von  $ABCD$ , und das Achsenverhältnis ist (beim Ansatz  $A(a, \frac{1}{a}, 1), \dots$ ) gleich  $\frac{1}{abcd}$ . (Ist soetwas nicht schon einmal vorgekommen, weiter vorn?)

Überhaupt jeder Punkt der bei der affinen Abbildung:  $ABCD \mapsto A^*B^*C^*D^*$  affin ist zu irgend einem bestimmten Punkt von  $ABCD$ , macht diese Bewegung mit, z.B. der zum Tangentialpunkt  $T$  von  $ABCD$  affine Punkt  $T^*$ .

Der Tangentialpunkt von  $A^*B^*C^*D^*$  und andere merkwürdige Punkte dagegen, die gehen kompliziertere Wege.

Zu erwähnen bleibt noch der Fall, wo  $ABCD$  ein Kreisviereck ist.

Dann ist  $A^*B^*C^*D^*$  auch ein Kreisviereck und zwar mit dem Gleichseitumhyperbelzentrum  $Z$  von  $ABCD$  als Mittelpunkt.  $A^*B^*C^*D^*$  ist sogar (gegenseitig) ähnlich dem Viereck  $ABCD$  (kongruent, wenn  $\mathcal{K}$  eine der Umparabeln von  $ABCD$  ist). Die affine Abbildung:  $ABCD \mapsto A^*B^*C^*D^*$  ist eine Spiegelstreckung, mit dem Zentrum auf dem Mittelpunktskegelschnitt von  $ABCD$ .

#### Literatur

- [1] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer.
- [2] Laborde J.- M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
- [3] Stärk Roland/Baumgartner Daniel: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks.  
Praxis der Mathematik, PM44 (2002) 19-27. Aulis Verlag, Köln.
- [4] Stärk R.: Eine merkwürdige Zahl des Vierecks.  
Praxis der Mathematik, PM46 (2004) 26-31. Aulis Verlag, Köln.
- [5] Stärk R.: Gegenwinkelsummen beim Viereck. [www.geometria.ch](http://www.geometria.ch)

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk  
Im Santenbühl 3  
CH-8234 Stetten  
[roland.staerk@sunrise.ch](mailto:roland.staerk@sunrise.ch)