Kollektivwinkel

Roland Stärk, 2016

Publiziert auf www.geometria.ch

Betrachtet werden zwei Geradenscharen: $f, \ldots$ und $g, \ldots$, mit je n Geraden, beliebig verstreut in der Ebene (Fig.1, $n = 4$).

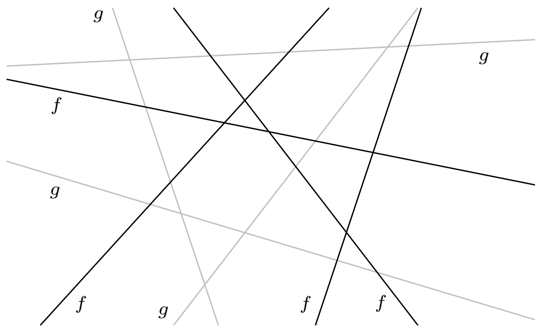

Fig. 1

Kann da über Winkel eine Aussage gemacht werden? Auf den ersten Blick: nein, zu viele Schnittpunkte, zu grosse Unregelmässigkeit. Doch, es gibt etwas. Die Geraden müssen numeriert werden: $f_1, f_2, \ldots, f_n$ und $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Man bildet die Winkelsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \measuredangle f_i g_i, \qquad \text{(Winkel orientiert, modulo } 180°\text{)}$$

Aber diese Summe ist doch von der Numerierung abhängig. Nein. jede eineindeutige Zuordnung der beiden Geradenscharen ergibt dasselbe!
Dies leuchtet ein, sobald eine Gerade h als Hilfsgerade hinzugenommen wird. Wegen $\measuredangle fg = \measuredangle fh + \measuredangle hg$ setzt sich dann die Winkelsumme zusammen aus n Winkeln $\measuredangle fh$ und n Winkeln $\measuredangle hg$, die beliebig gepaart werden können.

Definition:

> *Der* **Kollektivwinkel**, *oder einfach Winkel, zweier gleichmächtiger Geradenscharen* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *und* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *ist die Winkelsumme*
>
> $$\sum_{i=1}^{n} \measuredangle f_i g_i$$
>
> *(Winkel orientiert, und immer alles modulo* $180°$ *gerechnet).*
> *Diese Summe ist unabhängig von der Paarung der Geraden, es muss einfach eine eineindeutige Zuordnung sein.*
> *Man schreibt*
>
> $$\measuredangle(f_1, \ldots, f_n)(g_1, \ldots, g_n)\,.$$
>
> *Im Fall* $n = 1$ *bleibt es bei der Schreibweise:* $\measuredangle fg$.

Kollektivwinkel spielen besonders bei Dreiecken und Vierecken eine Rolle.
Bei zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ schreibt man für den Kollektivwinkel ihrer Seitengeraden statt $\measuredangle(AB, BC, CA)(A'B', B'C', C'A')$ einfach: $\measuredangle(ABC)(A'B'C')$.
Und entsprechend bei zwei Vierecken für den Kollektivwinkel ihrer je 6 Seiten: $\measuredangle(ABCD)(A'B'C'D')$.

Häufig tritt bei geometrischen Figuren, wie sich zeigen wird, der Kollektivwinkel 0 auf.
Zum Beispiel ist der Kollektivwinkel eines Dreiecks und seines Morley-Dreiecks gleich 0, was mit Hilfe von *Cabri* [2] schnell festgestellt werden kann. Eine Berechnung dagegen ist ziemlich anspruchsvoll (siehe Abschnitt 8).
Oder ein Viereck $ABCD$ und das Viereck $U_AU_BU_CU_D$ der Umkreismittelpunkte seiner Teildreiecke (U_A Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCD), sein Mittelsenkrechtenviereck, haben den Kollektivwinkel 0. Das ist sofort klar, denn bei vernünftiger Seitenzuordnung können sechs rechte Winkel summiert werden.

Bei einem Viereck $ABCD$ sind die Kollektivwinkel von je zwei Gegenseitenpaaren (Fig. 2) z.B. $\measuredangle(f_1f_2)(g_1g_2) = \measuredangle ABC + \measuredangle CDA$, die in [5] behandelten Gegenwinkelsummen des Vierecks.

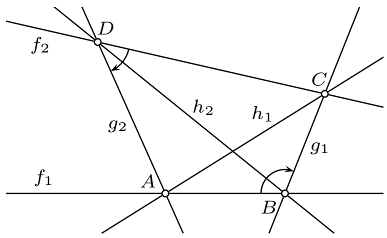

Fig. 2

Gegeben sind ein Dreieck ABC und zwei Punkte A', B' (Fig. 3).

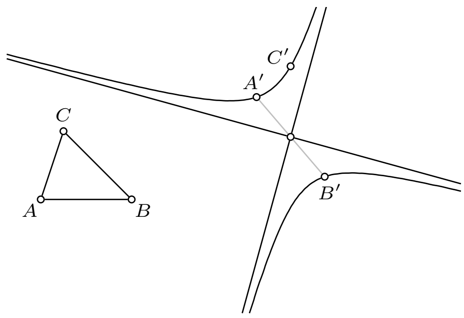

Fig. 3

Wo liegen die Punkte C', für welche der Kollektivwinkel $\measuredangle(ABC)(A'B'C') = \delta$ vorgegebene Grösse hat?

Eine kurze Rechnung zeigt, dass der Ort für C' eine Gleichseithyperbel ist, bei welcher A', B' diametrale Punkte sind.
(Wir arbeiten mit *Mathematica* [1]). Hilfreich ist, wenn man sich eine Prozedur für den Tangens des Kollektivwinkels zweier Dreiecke macht, die immer wieder gebraucht werden kann.

Die Fig. 4 zeigt, wie mit *Cabri* ein Fernpunkt N dieser Hyperbel konstruiert werden kann.

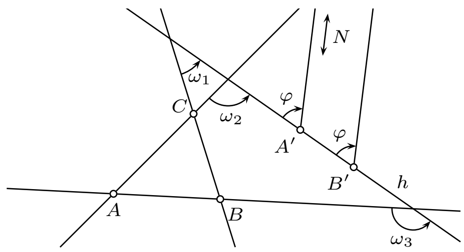

Fig. 4

Die Gerade $A'B'$ kann als Hilfsgerade dienen.

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + 0 + 2\varphi &= \delta \\ 2\varphi &= \delta - (w_1 + w_2 + w_3) \\ \varphi &= \begin{cases} \frac{\delta-(w_1+w_2+w_3)}{2} \\ \frac{\delta-(w_1+w_2+w_3)}{2} + 90^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Das heisst, der Winkel zwischen den beiden Fernpunkten beträgt 90°.

Gleiches Vorgehen bei Vierecken. Wenn bei $\measuredangle(ABCD)(A'B'C'D') = \delta$ die Punkte $A, B, C, D,\ A', B', C'$ und der Winkel δ fest vorgegeben werden, liefert die Rechnung für den geometrischen Ort von D' eine Kurve 3^{ter} Ordnung. Diese geht durch A', B', C'. Ihre drei Asymptoten laufen durch den Schwerpunkt des Dreiecks $A'B'C'$ und bilden einen regelmässigen Stern. Die Regelmässigkeit, also der Winkel 60° zwischen den Asymptoten, lässt sich erklären, wie soeben im Dreiecksfall der rechte.

Noch eine Formel. Für zwei Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gilt

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \measuredangle(ABCD)(A'B'C'D') \\ = \;& \measuredangle(ABC)(A'B'C') + \measuredangle(BCD)(B'C'D') + \measuredangle(CDA)(C'D'A') + \measuredangle(DAB)(D'A'B')\,. \end{aligned}$$

Man zeigt auch dies mit der Hilfsgeradenmethode.
Und für zwei Vierseite $f_1f_2f_3f_4$ und $g_1g_2g_3g_4$ mit ihren vier Teildreiseiten gilt

$$3 \cdot \measuredangle(f_1, f_2, f_3, f_4)(g_1, g_2, g_3, g_4) \;=\; \sum_{\text{alle Dreiseite}} \measuredangle(f_i, f_j, f_k)(g_i, g_j, g_k)\,.$$

Es folgt eine Sammlung geometrischer Probleme, bei denen es um Kollektivwinkel bei Dreiecken und Vierecken geht.

1

Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein Punkt P (Fig. 5).

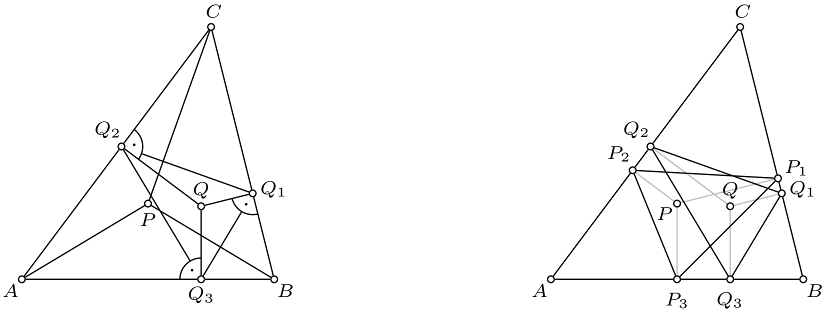

Fig. 5

Es sei Q der zu P isogonal konjugierte Punkt bezüglich Dreieck ABC (Konstruktion des isogonalkonjugierten Punkts: P an den Dreieckseiten spiegeln: X_1, X_2, X_3. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $X_1X_2X_3$ ist der zu P Konjugierte), und $Q_1Q_2Q_3$ sei das Lotfusspunktdreieck von Q im Dreieck ABC.

Hier gilt

$$\measuredangle(PABC)(QQ_1Q_2Q_3) \;=\; 0$$
$$\measuredangle(PA, PB, PC)(Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_1) \;=\; 90°.$$

Nachzuweisen braucht man nur, dass die Geraden PA und Q_2Q_3 orthogonal sind.

Eine weitere Eigenschaft der Vierecke $PABC$ und $QQ_1Q_2Q_3$ sei hier auch erwähnt: Sie sind inhaltsproportional, d.h. die Inhalte ihrer Teildreiecke sind proportional [6]:

$$J_{PAB} : J_{ABC} : J_{BCP} : J_{CPA} \;=\; J_{QQ_1Q_2} : J_{Q_1Q_2Q_3} : J_{Q_2Q_3Q} : J_{Q_3QQ_1}\,.$$

Nun soll auch das Lotfusspunktdreieck von P dazugenommen werden.

Die Kollektivwinkel des Dreiecks ABC mit den Fusspunktdreiecken zweier bez. ABC isogonalkonjugierter Punkte P, Q sind entgegengesetzt:

$$\measuredangle(ABC)(\text{Fusspunktdreieck von } P) \;=\; -\measuredangle(ABC)(\text{Fusspunktdreieck von } Q)\,.$$

Alles wird klar, sobald gezeigt ist, dass die beiden Fusspunktdreiecke denselben Umkreis haben. Dann kann man bei den Kreisvierecken $P_1P_2Q_1Q_2$, $P_2P_3Q_2Q_3$, $P_3P_1Q_3Q_1$ sehen, dass $\measuredangle AP_3P_2 = -\measuredangle CQ_2Q_3$ usw. ist.

2

Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein Punkt P mit seinem Lotfusspunktdreieck $P_1P_2P_3$ bez. ABC (Fig. 6).

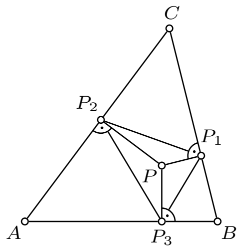

Fig. 5

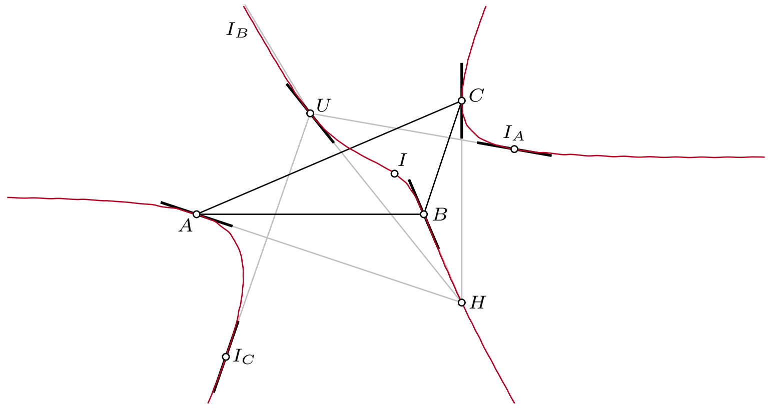

Fig. 6

Für welche Punkte P ist der Kollektivwinkel $\measuredangle(ABC)(P_1P_2P_3) = 0$?

Grundsätzlich kann zum Berechnen gesagt werden, dass für Dreiecksberechnungen baryzentrische Koordinaten von Vorteil sind:
Grunddreieck $A(1,0,0)B(0,1,0)C(0,0,1)$; $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$; $P(t_1,t_2,t_3)$.

Hier kommt man zum Resultat, dass der geometrische Ort für P eine Kurve 3^{ter} Ordnung ist,

$$\mathcal{C}\colon b^2c^2(a^2-b^2+c^2)\,t_1^2t_2^2 + a^2c^2(a^2-b^2-c^2)t_1t_2^2 + \ldots \;=\; 0$$

Die wichtigsten Eigenschaften von $\mathcal{C}$:
- $\mathcal{C}$ geht durch A, B, C, durch den Umkreismittelpunkt U und die In/Ankreismittelpunkte I, I_A, I_B, I_C des Dreiecks ABC (und damit auch durch den Höhenschnittpunkt H).
- Die Tangenten von $\mathcal{C}$ in A, B, C, U laufen in H zusammen.

Das Viereck $ABCU$ mit gemeinsamem Tangentenpunkt H, macht es möglich, mit *Cabri* $\mathcal{C}$ zu zeichnen: Man wählt einen Umkegelschnitt $\mathcal{K}$ von $ABCU$, den man variieren kann. Die Polare von H bezüglich $\mathcal{K}$ schneidet $\mathcal{K}$ in Punkten von $\mathcal{C}$.

- Auch die Tangenten in I, I_A, I_B, I_C haben einen gemeinsamen Punkt, den Punkt U. Auch von da aus kann die Konstruktion gemacht werden.
- Die Transversalen AU, BU, CU des Dreiecks ABC schneiden die Gegenseiten in deren dritten Schnittpunkten mit $\mathcal{C}$.
- Die drei Asymptoten von $\mathcal{C}$ gehen alle durch den Schwerpunkt S von ABC (Der Polarkegelschnitt von S bez. $\mathcal{C}$ besteht aus zwei Geraden, eine davon ist die Ferngerade) und zwar bilden sie ein regelmässiges Büschel.

Die interessante Kurve $\mathcal{C}$ hat noch weitere Eigenschaften.
- $\mathcal{C}$ ist der geometrische Ort aller Punkte P die zusammen mit U und ihrem isogonalkonjugierten Punkt bez. ABC kollinear sind.
- $\mathcal{C}$ ist auch der geometrische Ort aller Punkte P, mit der folgenden Eigenschaft: Das Dreieck, gebildet durch die Umkreismittelpunkte der Dreiecke PAB, PBC, PCA, hat gegenüber dem Dreieck ABC den Winkel 0.

Ganz ähnliche Verhältnisse für die Punkte P, deren Fusspunktdreieck den Winkel 90° gegen das Dreieck ABC hat:

$$\measuredangle(ABC)(P_1P_2P_3) \;=\; 90^\circ\,.$$

Auch ihre Kurve ist von 3^{ter} Ordnung. Bei ihr spielen der Lemoinepunkt des Dreiecks ABC und dessen Polare bez. des Umkreises von ABC eine besondere Rolle.

3

Ein Punkt P bewegt sich auf dem Umkreis k eines Dreiecks ABC (Fig. 7).

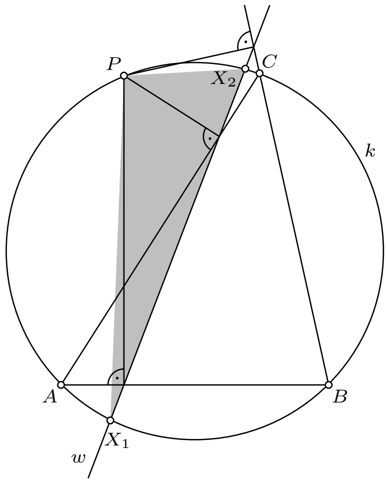

Fig. 7

w sei die Wallacegerade von P bez. ABC, und X_1, X_2 deren Schnittpunkte mit k. Man berechne den Kollektivwinkel $\measuredangle(ABC)(PX_1X_2)$.
Er ist unabhängig von der Lage des Punktes P auf k.

Bei baryzentrischer Rechnung wird man eine Seite des Dreiecks noch normieren ($c = 1$), damit weniger Variablen beteiligt sind.

4

Wie gross ist bei einem Kreisviereck der Kollektivwinkel von Diagonalpunktdreieck und Steinerdreieck?

Der für Vierecksberechnungen bewährte Ansatz: $A\big(a, \frac{1}{a}, 1\big)$, $B\big(b, \frac{1}{b}, 1\big), \ldots$ bringt hier den Vorteil, dass die Kreisbedingung mit $d = \frac{1}{abc}$ erfasst werden kann.

Die Diagonalpunkte $G_1 = AD \cap BC$, $G_2 = BD \cap AC$, $G_3 = CD \cap AB$ sind schnell gerechnet. Die Steinerpunkte des Vierecks sind die Steinerpunkte seiner drei von je zwei Gegenseitenpaaren gebildeten Vierseite:

St_1 Steinerpunkt von AB, BD, DC, CA
St_2 Steinerpunkt von BC, CD, DA, AB
St_3 Steinerpunkt von CA, AD, DB, BC .

Das Resultat der Rechnung: $\measuredangle(G_1G_2G_3)(St_1St_2St_3) = 0$.

Die Rechnung zeigt auch, dass bei einem Kreisviereck die Steinerpunkte auf den Seiten des Diagonalpunktdreiecks liegen und dass sie invers sind zu den Diagonalpunkten bezüglich des Umkreises (Fig. 8).

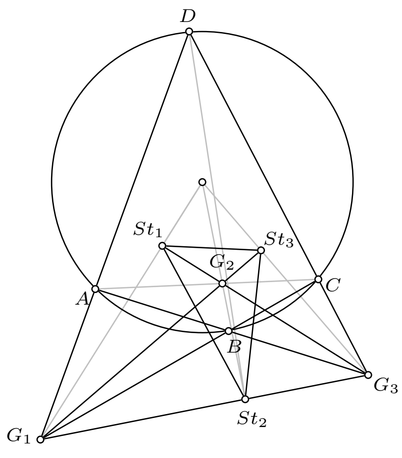

Fig. 8

5

Betrachtet werden zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ (Fig. 9).

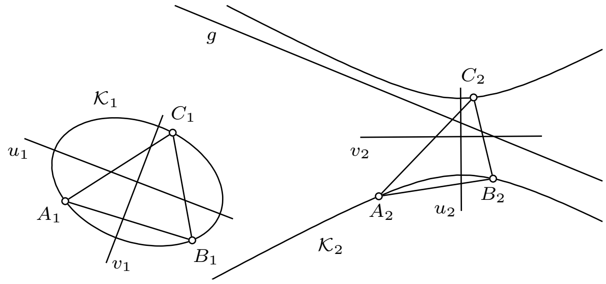

Fig. 9

Eine Gerade g wird bezüglich jedes der Dreiecke isogonal abgebildet. Die Bilder $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ sind Umkegelschnitte der Dreiecke (In der Fig. 9 sind dies eine Ellipse und eine Hyperbel, das hängt von g ab). Die Dreiecke werden festgehalten, g wird bewegt. Man richte sein Augenmerk auf die Achsen u_1, v_1 und u_2, v_2 der beiden Kegelschnitte.

Es gilt der erstaunliche

Satz. Wenn g verschoben wird, behalten die Kegelschnittachsen ihre Richtungen. Verändert man die Richtung von g um den Winkel φ, so verändert sich die Richtung jeder der vier Achsen um den Winkel $-\frac{\varphi}{2}$.
Das heisst, der Kollektivwinkel der beiden Achsenkreuze ist unabhängig von der Wahl der Geraden g.
Er ist gleich dem Kollektivwinkel der beiden Dreiecke:

$$\measuredangle(u_1, v_1)(u_2, v_2) \;=\; \measuredangle(A_1B_1C_1)(A_2B_2C_2)\,.$$

Den ersten Teil des Satzes beweist man am besten baryzentrisch, weil so die Isogonalabbildung leicht zu realisieren ist.
Die Gerade g durch den Punkt $Q(q, 1, 0)$ und den Fernpunkt $N(n, 1, -n-1)$ hat das Bild

$$\mathcal{K}\colon (q-n)\,t_1t_2 + b^2q(1+n)\,t_1t_3 - a^2(1+n)\,t_2t_3 \;=\; 0 \qquad (\text{Normierung } c = 1)\,.$$

Man berechnet die Fernpunkte von $\mathcal{K}$ und dann die Fernpunkte U, V der winkelhalbierenden Achsen:

$$U, V(-2a^2b^2 - 2a^2b^2n \pm W_{dis}, 2b^2(a^2 - n + a^2n), 2b^2n \mp W_{dis}), \quad W_{dis}^2 = 4a^2b^2(a^2 - n + a^2n + b^2n + b^2n^2)$$

usw.

Den zweiten Teil verifiziert man mit einer möglichst günstigen Geraden g, z.B. der Verbindung von C_1 und C_2. Die beiden Kegelschnitte sind dann ausgeartet. Wir betrachten nur $\mathcal{K}_1$ (Fig. 10). $\mathcal{K}_1$ ist das Geradenpaar A_1B_1 zusammen mit der zu g bez. $A_1B_1C_1$ isogonalen Transversalen durch C.
In der Figur 10 ist angedeutet, wie mit g als Hilfsgeraden die beiden Kollektivwinkel zustandekommen.

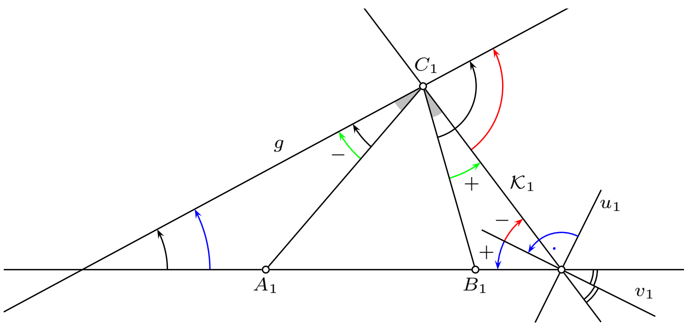

Fig. 10

Der Anteil den u_1 und v_1 zum Winkel $\measuredangle(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ beisteuern, ist bis auf 90° gleich gross wie der Anteil, den das Dreieck $A_1B_1C_1$ zum Winkel $\measuredangle(A_1B_1C_1)(A_2B_2C_2)$ beisteuert. Dasselbe beim Dreieck $A_2B_2C_2$.

6

Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Vierecks $ABCD$ bilden ein Viereck, das Mittelsenkrechtenviereck von $ABCD$. Seine Ecken U_A, U_B, U_C, U_D sind die Umkreismittelpunkte der Deiecke BCD, CDA, DAB, ABC (Fig. 11).

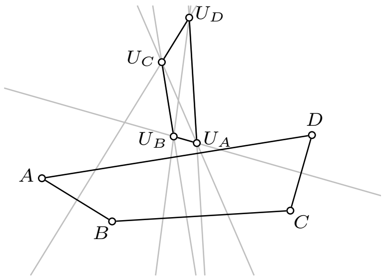

Fig. 11

Man berechne bei den beiden Vierecken die Diagonalpunkte und die Steinerpunkte (vergleiche Abschnitt 4) und zeige, dass die Kollektivwinkel

$\measuredangle$(Diagonalpunktdreieck von $ABCD$)(Steinerdreieck von $ABCD$)
$\measuredangle$(Diagonalpunktdreieck von $U_AU_BU_CU_D$)(Steinerdreieck von $U_AU_BU_CU_D$)

gleich gross sind.

Es gibt noch weitere bemerkenswerte Eigenschaften bei einem Viereck und seinem Mittelsenkrechtenviereck.
– Sie haben beide dieselbe σ-Zahl [4]
– und sie sind gegenwinkelsummengleich [5].

Gibt es vielleicht nähere Zusammenhänge?

7

Gegeben ist ein Viereck $ABCD$. Man wählt irgend einen Kreis k, seinen Mittelpunkt M und seinen Radius. An diesem Kreis werden die Ecken A, B, C, D invertiert: A', B', C', D' (Fig. 12).

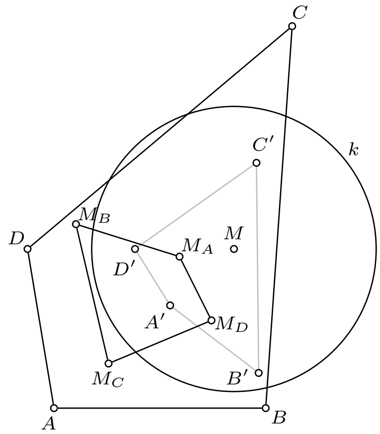

Fig. 12

Aber nicht das Viereck $A'B'C'D'$ interessiert, man bildet noch den Punkt M in jedem der Teildreiecke von $A'B'C'D'$ isogonal ab. M_A sei der zu M isogonalkonjugierte Punkt beim Dreieck $B'C'D'$, M_B derjenige beim Dreieck $C'D'A', \ldots$. Das Viereck $M_AM_BM_CM_D$ ist voller Geheimnisse.

– Der Kollektivwinkel

$$\measuredangle(XYZ)(M_XM_YM_Z); \qquad \{X, Y, Z\} \subset \{A, B, C, D\}$$

ist für alle Teildreiecke von $ABCD$ derselbe.
– Zwischen dem Winkel der Vierecke und dem einheitlichen Winkel der Dreiecke gilt die Formel

$$\measuredangle(ABCD)(M_AM_BM_CM_D) \;=\; 2 \cdot \measuredangle(XYZ)(M_XM_YM_Z)\,.$$

– Gegenseiten schneiden sich beim Viereck $M_A M_B M_C M_D$ unter gleichen Winkeln wie die entsprechenden beim Viereck $ABCD$.
– Die Vierecke $ABCD$ und $M_A M_B M_C M_D$ sind inhaltsproportional [6]:

$$\frac{J_{M_A M_B M_C}}{J_{ABC}} = \frac{J_{M_B M_C M_D}}{J_{BCD}} = \dots$$

– $M_A M_B M_C M_D$ und $ABCD$ haben dieselbe σ-Zahl [4].
– $M_A M_B M_C M_D$ und $ABCD$ sind gegensinnig (!) gegenwinkelsummengleich [5].

Und schliesslich: Man kann den Kreis k wählen, wo und wie gross man will, das Viereck $M_A M_B M_C M_D$ behält seine Form!

Der analytische Nachweis dieser Dinge ist wegen der Isogonalabbildung formelriesig, auch wenn die Rechnung beim Viereck $A'B'C'D'$ angesetzt wird. Man wird einfach numerisch rechnen, mit zwei, drei Variablen eingestreut.

8

Das Morleydreieck ist, weil Winkeldreiteilung eine Rolle spielt, eher ein Fremdkörper in der Elementargeometrie. Aber es gibt Möglichkeiten, die Gleichseitigkeit des Dreiecks rechnerisch nachzuweisen.

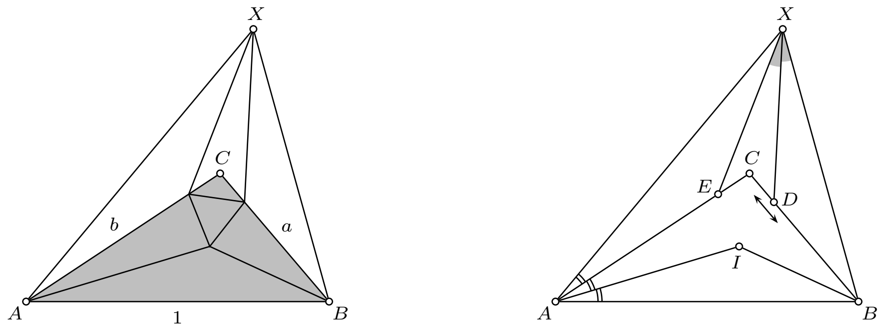

Fig. 13

Als baryzentrisches Grunddreieck für die Berechnung beim Dreieck ABX (Fig. 13) nimmt man mit Vorteil das schraffierte Dreieck ABC, dann kann die untere Ecke des Morleydreiecks als Inkreismittelpunkt $I(a, b, 1)$ sofort erfasst werden (Normierung $\overline{AB} = 1$, und man kann noch $a \leq b$ voraussetzen). Die Gerade AI wird an der Geraden AC gespiegelt, BI an BC, das gibt den Punkt X. Nun lässt man auf der Geraden BC einen Punkt D laufen. Es sei v das Verhältnis, in dem er BC teilt ($v < 0$). Die Gerade XB an der Geraden XD spiegeln, gibt E. Dann D an XE spiegeln und verlangen, dass man auf XA kommt. Das führt zur Gleichung

$$\big((-1+a^2-b-b^2+b(1-a+2b)\,v\big)\cdot\big((-1-a+b)(1-a^2+b+b^2)+b\,(a^2-(b-1)^2)\,v+b^2\,(-1+a+b)\,v^2\big) = 0\,.$$

Sie hat drei Lösungen für v, denn wenn man mit dem Winkel $\measuredangle DXB = \varphi$ durch Verdreifachung auf XA kommt, geht das auch mit $\varphi + 60^\circ$ und $\varphi + 120^\circ$. Gesucht wird der Wert für v, der negativ ist. Die Lösung des ersten Faktors der Gleichung ist positiv, der zweite Faktor hat eine negative und eine positive Lösung. Für diese beiden errechnet der Computer

$$\overline{ID} = \overline{DE} = \overline{EI}, \qquad \text{und dass} \qquad \measuredangle(ABX)(IDE) = 0 \quad \text{ist.}$$

9

A, B, C, D seien vier Punkte einer Parabel, mit der Achse w und dem Brennpunkt F (Fig. 14).

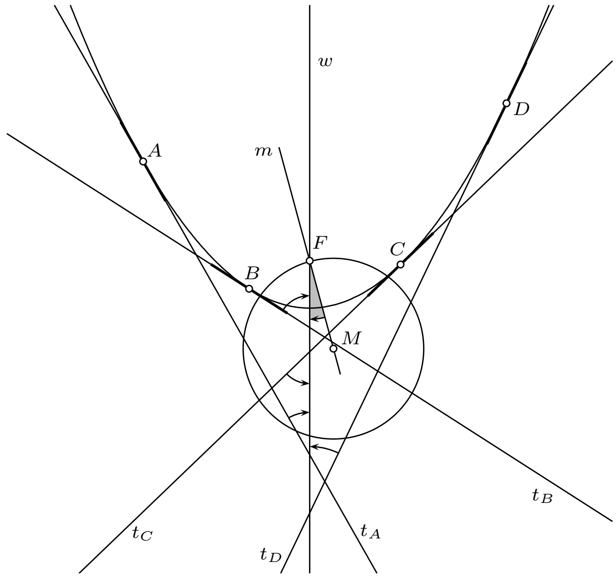

Fig. 14

Die Tangenten t_A, t_B, t_C, t_D in A, B, C, D bilden ein Vierseit. F ist dessen Steinerpunkt, das ist der gemeinsame Punkt der Umkreise aller vier Teildreiseite des Vierseits. Die vier Umkreismittelpunkte der Teildreiseite sind konzyklisch, sie liegen auf dem Steinerkreis des Vierseits, der auch durch F geht. Es sei M sein Mittelpunkt und m die Gerade MF.

Für die Winkel zwischen den Vierseitseiten und der Parabelachse w gilt

$$\measuredangle t_A w + \measuredangle t_B w + \measuredangle t_C w + \measuredangle t_D w \;=\; \measuredangle m w\,.$$

Beweis beginnend mit dem Ansatz $A(a, a^2, 1)$, $B(b, b^2, 1), \ldots$

Nun werden zwei Vierseite $f_1 f_2 f_3 f_4$ und $g_1 g_2 g_3 g_4$ mit den Achsen w_f, w_g und den Verbindungsgeraden *Steinerkreismittelpunkt-Steinerpunkt* m_f, m_g betrachtet (Fig. 15).

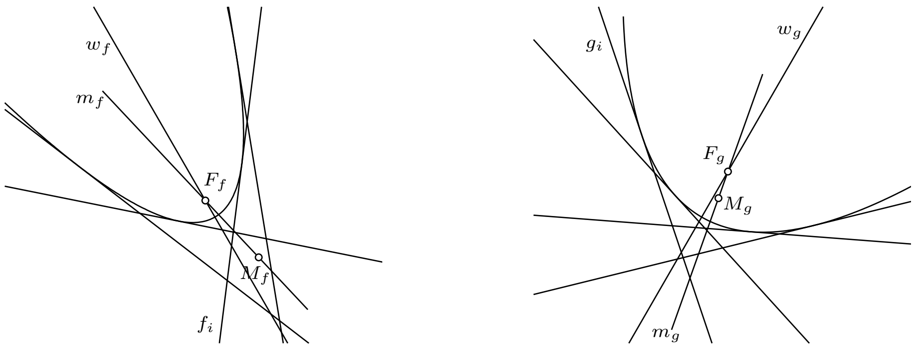

Fig. 15

Wir berechnen den Winkel

$$\begin{aligned}
\measuredangle(f_1, f_2, f_3, f_4)(g_1, g_2, g_3, g_4) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{4} \measuredangle f_i g_i \\
&= \quad \sum \big(\measuredangle f_i w_f + \measuredangle w_f w_g + \measuredangle w_g g_i\big) \\
&= \quad \measuredangle m_f w_f + 4 \cdot \measuredangle w_f w_g + \underbrace{\measuredangle w_g m_g}_{= \measuredangle w_f m_g - \measuredangle w_f w_g} \\
&= \quad \underline{\underline{\measuredangle m_f m_g + 3 \cdot \measuredangle w_f w_g}}
\end{aligned}$$

Eine schöne Formel.

10

Noch zwei Vierseitprobleme.

(1) Beim Vierseit der Fig. 14 seien noch die Schwerpunkte der vier Teildreiseite konstruiert (S_A Schwerpunkt des Dreiseits $t_Bt_Ct_D, \ldots$).
Man untersuche das Viereck $S_AS_BS_CS_D$. Es kommt bekannt vor.

Der Kollektivwinkel $\measuredangle(ABCD)(S_AS_BS_CS_D)$ ist gleich 0.

(2) Die sechs Ecken eines Vierseits werden an einem Kreis um seinen Steinerpunkt invertiert. Die Bilder sind die Ecken wieder eines Vierseits, denn die Ecken jedes Teildreiseits gehen über in kollineare Punkte, weil ihr Umkreis durch den Steinerpunkt läuft (Fig. 16).

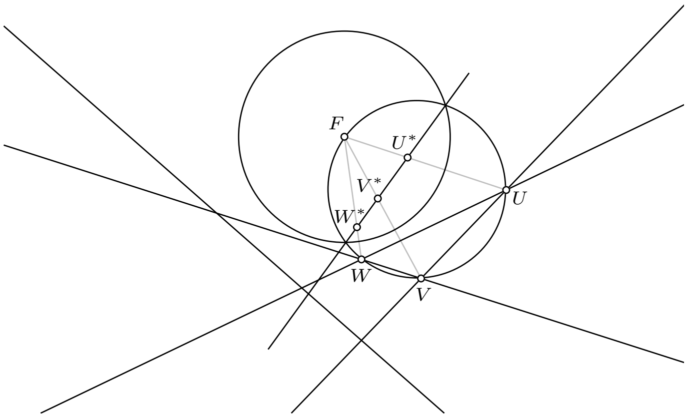

Fig. 16

Man berechne den Kollektivwinkel der beiden Vierseite und zeige ihre gegensinnige Ähnlichkeit.

Wenn sie gegensinnig ähnlich sind, lassen sie sich mit einer Streckspiegelung ineinander überführen. Zentrum? Achse?

Literatur

[1] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer.
[2] Laborde J.– M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
[3] Stärk Roland/Baumgartner Daniel: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks.
Praxis der Mathematik, PM44 (2002) 19-27. Aulis Verlag, Köln.
[4] Stärk R.: Eine merkwürdige Zahl des Vierecks.
Praxis der Mathematik, PM46 (2004) 26-31. Aulis Verlag, Köln.
[5] Stärk R.: Gegenwinkelsummen beim Viereck. www.geometria.ch
[6] Stärk R.: Affine Vierecke. www.geometria.ch

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH-8234 Stetten
roland.staerk@sunrise.ch