QUADRATEINLAGERUNG

Roland Stärk, 2017

Publiziert auf www.geometria.ch

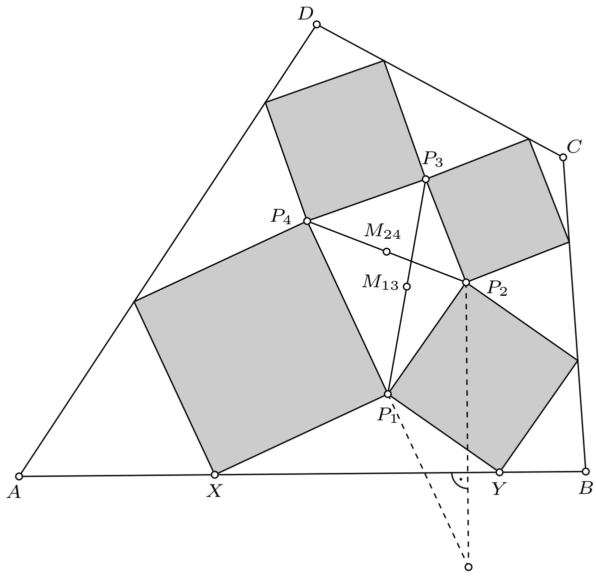

Fig. 1

An die Strecken eines geschlossenen Vierstreckenzugs $P_1P_2P_3P_4P_1$ (Fig. 1) sind Quadrate angesetzt, alle nach rechts (in der Umlaufrichtung der Eckenaufzählung). Die zu jeder Ecke P gehörenden beiden Quadratecken, wie X und Y bei P_1, werden verbunden. Es entsteht ein zweiter Streckenzug: $ABCDA$.

Hier soll die anspruchsvolle Aufgabe gelöst werden, ausgehend vom Streckenzug $ABCDA$ die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 zu konstruieren.

Wir konstruieren stets mit *Cabri* [1]. Es ist von grossem Vorteil, wiederkehrende Teilschritte mit Prozeduren abzukürzen, hier: "Quadrat an gerichtete Strecke ansetzen".

Man beachte, dass beim Aufbau der Fig. 1 mit einem anderen Streckenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ ein Streckenzug $ABCDA$ entstehen kann, bei dem Quadratecken auch auf den Verlängerungen seiner Strecken liegen (Fig. 2).
Man probiere auch den anderen Umlaufsinn aus.
"Einlagerung" im weitesten Sinn (in das Vierseit, gebildet durch die Geraden, auf denen die Strecken des Streckenzugs $ABCDA$ liegen).

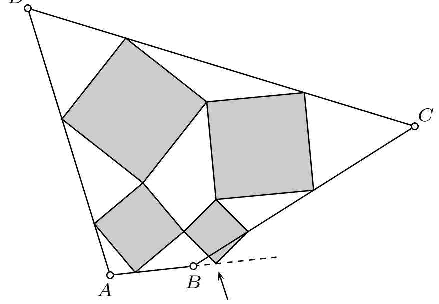

Fig. 2

Vielleicht denkt man zuerst noch an den in [2] behandelten Dreiecksfall (Fig. 3).

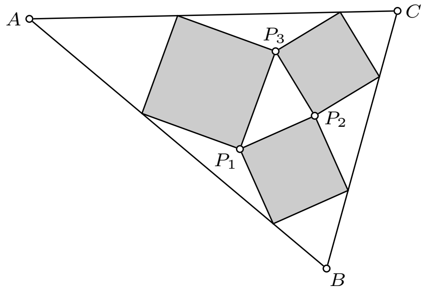

Fig. 3

Bei dieser Figur sind die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ proportional zu den Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.
Beim Vierstreckenfall liegen die Dinge nicht so einfach.

In der Fig. 1 sind beim Streckenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ noch die Mittelpunkte M_{13}, M_{24} der Diagonalen P_1P_3, P_2P_4 eingezeichnet. Sie spielen eine wichtige Rolle: Die Gerade $M_{24}P_1$ steht nämlich senkrecht auf der Geraden AB.
Dies wird sofort klar, wenn das Zwischendreieck XYP_1 um P_1 um den Winkel 90° gedreht wird. Im Dreieck, gebildet durch das gedrehte Dreieck zusammen mit dem Dreieck $P_1P_2P_4$ ist $M_{24}P_1$ Mittellinie.
Und rundherum gilt: $M_{13}P_2$ ist orthogonal zu BC, $M_{24}P_3$ orthogonal zu CD, $M_{13}P_4$ orthogonal zu DA.
Und schon ist ein Konstruktionsprogramm für unser Problem gefunden.

Wir bauen die Fig. 1 ausgehend von den Punkten M_{13}, M_{24} von innen her auf, die Orthogonalität von $M_{24}P_1$ auf AB etc. ausnützend. Die Punkte M_{13}, M_{24} werden irgendwo abseits gewählt – man kennt ja ihre genaue Lage beim Streckenzug $ABCDA$ nicht – und zur Verdeutlichung wird dort alles mit einem Akzent $'$ versehen: M'_{13}, M'_{24}. Ist die Figur dort gemacht, kann sie dann leicht an den Ausgangsort übertragen werden (Fig. 4).

Um den Abstand der Punkte M'_{13}, M'_{24} braucht man sich nicht zu kümmern. Er bestimmt die Grösse der entstehenden Figur. Ähnlichkeit genügt.

Eine Einschränkung:
Streckenzüge $ABCDA$, bei denen Gegenstrecken parallel sind, sollen vorerst nicht berücksichtigt werden.

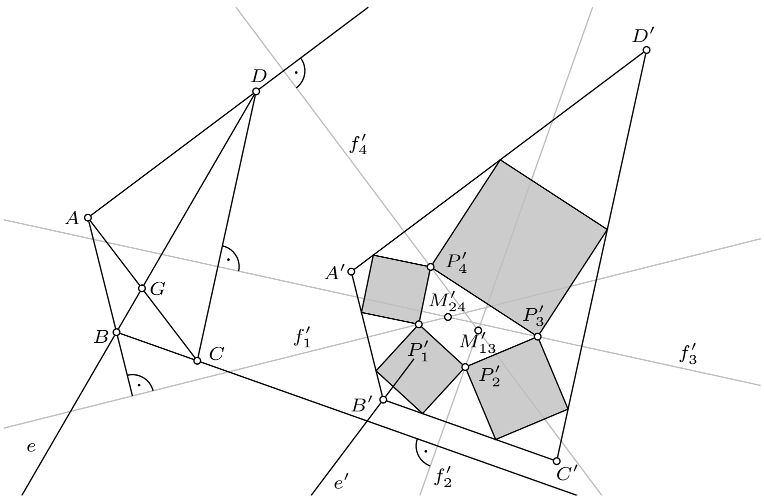

Fig. 4

Auf den zu den Geraden AB, CD orthogonalen Geraden f'_1, f'_3 durch M'_{24} müssen die Punkte P'_1, P'_3 so gefunden werden, dass M'_{13} ihre Mitte ist (f'_3 spiegeln an M'_{13} und mit f'_1 schneiden: P'_1, dann P'_1 spiegeln an M'_{13}: P'_3). Entsprechendes für P'_2, P'_4.
Dann können die Quadrate angesetzt werden, und schon ist die Aufgabe gelöst – beim Streckenzug $A'B'C'D'A'$.

Halt!
Die Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ sind wohl parallel zu AB, BC, CD, DA, das hat man eingerichtet, aber ähnlich sind die Streckenzüge $A'B'C'D'A'$ und $ABCDA$ damit noch nicht. Auch $B'D'$ muss parallel BD sein.

Die Problematik liegt bei der Wahl der Punkte M'_{13}, M'_{24}, nur einer von ihnen darf frei gewählt werden. Die Gerade $M'_{13}M'_{24}$ muss die richtige Richtung haben, aber was heisst richtig?
Wenn man $M'_{13}M'_{24}$ verändert, verformt sich $A'B'C'D'A'$. Mit welcher Richtung wird auch die Parallelität der Diagonalen $e' = B'D'$ und $e = BD$ erreicht?

Ein helfender Zusammenhang zwischen M_{13}, M_{24} und dem Viereck $ABCD$ in der Fig. 1, vielleicht eine Beziehung zu den wichtigen Viereckspunkten – Tangentialpunkt [3], Gleichseitumhyperbelzentrum, Schwerpunkt – ist nicht ersichtlich.
Das kann ja auch kaum sein, denn hier geht es nicht um das (allgemeine) Viereck $ABCD$, sondern um einen seiner Streckenzüge.

Man könnte M'_{24} festhalten und M'_{13} auf einem Kreis um M'_{24} variieren. Die Kurve, welche e' dabei beschreibt, ist schwierig.
Ein anderer Weg bietet sich an.

Die Punkte M'_{13}, M'_{24} sollen in der Fig. 4 fest bleiben. Dafür wird der Streckenzug $ABCDA$ bewegt, und zwar drehen wir ihn um seinen Diagonalpunkt $G = AC \cap BD$. Zu jeder Drehposition gehört ein Streckenzug $A'B'C'D'A'$, mit zu den Strecken von $ABCDA$ parallelen Strecken.
Beide Diagonalen e und e' sind jetzt in Bewegung. Sie sollten parallel sein, ihr Schnittpunkt S (der bei der hier in Fig. 4 gewählten Disposition ausserhalb des Blattes liegt, weil die Richtungen schon beinahe stimmen) muss ein Fernpunkt sein. Welchen geometrischen Ort beschreibt S bei der Drehung von $ABCDA$?

Die Überraschung:
S bewegt sich auf einer Kurve 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt. Das Drehzentrum G ist der Doppelpunkt dieser Kurve, wir nennen sie $\mathcal{C}$.
Dass dies so ist, zeigt *Cabri*:
$\mathcal{C}$ geht bei der Inversion an einem Kreis um G offensichtlich in einen durch G laufenden Kegelschnitt über [4].

Die rechnerische Verifizierung ist nicht ganz einfach.
Wir arbeiten immer mit *Mathematica* [5].
Zuerst wird man numerisch rechnen, nur bei der Drehung um G, die am besten mit Hilfe der Spiegelungen an zwei durch G laufenden Geraden durchgeführt wird, setzt man die eine von ihnen allgemein an. Wenn alles gelingt, können dann sukzessive Buchstaben beigezogen werden.

Die Tangente in einem Punkt P des Kegelschnitts geht bei der Inversion am Kreis um G über in den Kreis durch G, welcher $\mathcal{C}$ im Bild von P berührt. Die Tangente, welche in G berührt, die ja in sich übergeht, läuft somit durch den gesuchten Fernpunkt von $\mathcal{C}$. Der gedrehte Streckenzug, der diese Tangente als Diagonale e besitzt, liefert den gewünschten, ähnlichen Streckenzug $A'B'C'D'A'$. Die bei diesem konstruierten Quadrate müssen dann einfach noch in den Ausgangsstreckenzug übertragen werden.

Und mit etwas Ausdauer lässt sich bei *Cabri* eine Prozedur machen, welche die ganze Konstruktion durchführt.

Zum Schluss noch eine Bemerkung zu den Streckenzügen $ABCDA$, bei denen ein Gegenstreckenpaar parallel ist.
Wenn bei der Fig. 4 die Strecken BC und DA parallel sind, sind die vier Punkte M'_{13}, P'_2, P'_4, M'_{24} kollinear, sie liegen auf einer Geraden orthogonal zu BC. Die Fig. 5 zeigt diese Situation.

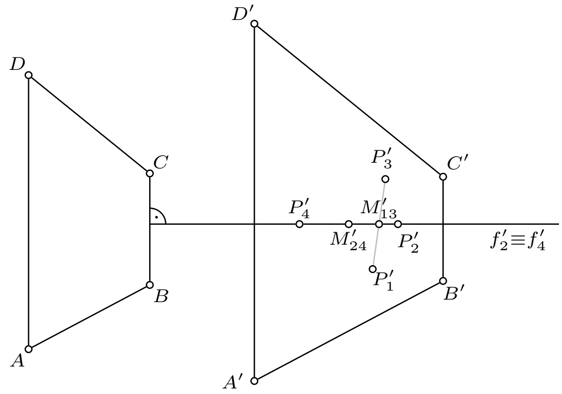

Fig. 5

Man wählt M'_{24}, M'_{13}, P'_2, konstruiert P'_4, P'_1, P'_3 und dann den zu $P'_1P'_2P'_3P'_4$ gehörenden Streckenzug $A'B'C'D'A'$.
Wenn nun M'_{13} und M'_{24} festgehalten werden und P'_2 bewegt wird, bewegt sich B' auf einer Geraden, die Diagonale $B'D'$ hüllt eine Parabel ein und auch die Geraden $B'P'_2$ und $A'P'_2$ beschreiben Parabeln. Mit Hilfe dieser Kurven kann die ideale Position von P'_2 gefunden werden.

Im noch spezielleren Fall, wenn beide Gegenstreckenpaare von $ABCDA$ Parallelenpaare sind, wenn sie ein Parallelogramm bilden, dann ist dessen Zentrum sowohl M_{13} als auch M_{24}. Hier wird P'_1 auf f'_1 fest gewählt.

Literatur

[1] Laborde J.– M./Bellemain F.: Cabri-GÉOMÈTRE II, TEXAS INSTRUMENTS FRANCE.
[2] Praxis der Mathematik, PM31(1989), Aulis Verlag, Köln.
[3] Stärk Roland/Baumgartner Daniel: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks.
Praxis der Mathematik, PM44 (2002) 19-27. Aulis Verlag, Köln.
[4] Stärk R.: Kurven dritter Ordung mit Doppelpunkt. www.geometria.ch
[5] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer.

Anschrift des Verfassers:

Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH-8234 Stetten
roland.staerk@sunrise.ch